

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

THOAI-SUM LUU

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A LA THÉORIE LINÉARISÉE
DES EFFETS DE JETS MINCES ET DE CAVITATIONS
CALCUL DES ÉCOULEMENTS PAR ANALOGIE RHÉOÉLECTRIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

COMPRESSEURS AXIAUX ET CENTRIFUGES SUPERSONIQUES

Soutenues, le 17 décembre 1960, devant la Commission d'examen

Jury	{	MM. PÉRÈS	Président.
		MALAVARD	Examineurs.
		SIESTRUNCK	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556003_0013

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

THOAI-SUM LUU

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A LA THÉORIE LINÉARISÉE
DES EFFETS DE JETS MINCES ET DE CAVITATIONS
CALCUL DES ÉCOULEMENTS PAR ANALOGIE RHÉOÉLECTRIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

COMPRESSEURS AXIAUX ET CENTRIFUGES SUPERSONIQUES

Soutenues, le 17 décembre 1960, devant la Commission d'examen

Jury	{	MM. PÉRÈS	<i>Président.</i>
		MALAVARD	<i>Examineurs.</i>
		SIESTRUNCK	



CONTRIBUTION
A LA
THÉORIE LINÉARISÉE DES EFFETS
DE JETS MINCES ET DE CAVITATIONS
CALCUL DES ÉCOULEMENTS
PAR ANALOGIE RHÉOÉLECTRIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	TRILLAT	T	Microscopie et diffract. électronique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	WIEMANN	T	Chimie organique et structur.
PRENANT	T	Anatomie et histol. comparées.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et phys. céleste.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
BARRABÉ	T	Géologie struct. et géologie appliquée.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
BOURCART	T	Géogr. physique et géol. dynamique.	PRUVOST	T	Géologie.
PLANTEFOL	T	Botanique.	AMIEL	T	Chimie générale.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	HOCART	T	Minéralogie.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (Orsay).
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	COUTEAUX	T	Biol. animale (P.C.B.).
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
WYART	T	Minéralogie.	CHOQUET	T	Théor. des fonctions et topologie.
TEISSIER	T	Zoologie.	FELDMANN	T	Biol. végétale marine.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	GUINIER	T	Physique des solides.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	JOST	T	Physiologie comparée.
MONNIER	T	Physiologie générale.	FORTET	T	Calcul des prob. et physique mathématique.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	SCHWARTZ	T	Calc. diff. et intégr.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	MALAVARD	T	Aviation.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	BRELOT	T	Calcul différentiel.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	NORMANT	T	Synthèse organique.
COULOMB	T	Physique du globe.	BÉNARD	T	Chimie minérale.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	DUGUÉ	T	Statistiques mathém.
P. DRACH	T	Zoologie.	SOULAIRAC	T	Psychophysiology.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).	ULRICH	T	Physiologie végétale.
EPHRUSI	T	Génétique.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) (Orsay).	CHADEFAUD	T	Botanique.
GAUTHERET	T	Biol. végétale (P.C.B.).	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiol. générale.
LUCAS	T	Recherches physiques.	SALEM	T	Mathématiques générales.
A. THOMAS	T	Biol. cellulaire.	LELONG	T	Mathématiques générales.
ARNULF	T	Optique appliquée.	DEVILLERS	T	Anatomie et histol. comparées.
M. MORAND	T	Enseignement de physique.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	GLANGEAUD	T	Géogr. physique et géologie dynamique.
DANJON	T	Astronomie.	GODEMENT	T	Mathématiques (M.G.P.).
PETIT	T	Biologie maritime.	PISOT	T	Techniques mathém. de la physique.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	E. ROCH	T	Géologie.
GALLIEN	T	Embryologie.	SCHATZMANN	T	Astrophysique.
EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	TERNIER	T	Paléontologie stratigraphique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
THELLIER	T	Physique du globe.	RIZET	T	Génétique.
L'HÉRITIER	T	Génétique.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
GRIVET	T	Radio-électricité.	M ^{me} TONNELAT	T	Relativité.
PONCIN	T	Mécanique générale.	DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.	SOUCHAY	T	Chimie générale.
QUELET	T	Chimie organique.	AIGRAIN	T	Électrotechn. générale.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	BRUSSET	T	Chimie minérale.
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécule.	M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
JUNG	T	Pétrographie.	M ^{me} HUREL-PY	T	Biol. vég. (P.C.B.).
			PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).

Ce travail a été effectué au Laboratoire des Analogies Rhéoelectriques de l'Institut Blaise Pascal (Centre National de la Recherche Scientifique).

Qu'il me soit permis ici d'exprimer ma profonde gratitude à M. le Professeur PÉRÈS, Doyen de la Faculté des Sciences, Membre de l'Institut, pour l'attention bienveillante qu'il a accordée à mon travail, et à M. le Professeur MALAVARD, Directeur du Laboratoire, pour les conseils précieux qu'il a bien voulu me prodiguer.

Je tiens également à exprimer ma sincère reconnaissance à M. le Professeur SIESTRUNCK qui a contribué à ma formation scientifique.

A tout le Personnel du Laboratoire, j'adresse mes chaleureux remerciements pour l'aide qu'il m'a apportée dans la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1
1 Rappel sur les mouvements faiblement perturbés	3
2 Conditions aux limites	4
2,1 Condition de glissement sur un profil	4
2,2 Ligne de jet mince	4
2,3 Ligne de courant à pression constante	6

CHAPITRE PREMIER

DÉVIATION D'UN JET PRINCIPAL PAR UN JET AUXILIAIRE FAIBLEMENT INCLINÉ

1 Introduction	7
2 Théorie linéarisée	7
3 Calcul analogique rhéoelectrique	10
4 Résultats	10
5 Approximation pour les faibles C_{μ}	13

CHAPITRE II

ACTION D'UN JET MINCE A LA SORTIE PÉRIPHÉRIQUE D'UN DIFFUSEUR

1 Introduction	18
2 Théorie	18
2,1 Diffuseur avec soufflage « régulier »	19
2,2 Tuyère droite avec soufflage « singulier »	19
2,3 Diffuseur avec soufflage « singulier »	22
3 Calcul analogique et résultats	22
3,1 Diffuseur avec soufflage « régulier »	22
3,2 Tuyère droite avec soufflage « singulier »	23
4 Écoulements plans	25
4,1 Remarque sur la représentation analogique. Résultats	25
4,2 Calcul approximatif pour les faibles C_{μ}	25
4,21 Diffuseur avec soufflage « régulier »	25
4,22 Tuyère droite avec soufflage « singulier »	27

CHAPITRE III

**EFFET D'UN JET MINCE
AU BORD DE FUITE DU CARÉNAGE D'UNE HÉLICE CARÉNÉE,
PROBLÈME D'ADAPTATION DE L'HÉLICE**

	PAGES
1 Introduction	29
2 Théorie linéarisée	29
2,1 Interprétation physique des écoulements φ_1 et φ_2	32
2,11 Soufflage singulier, l'hélice ne fonctionne pas : l'écoulement φ_1	32
2,12 Soufflage régulier avec fonctionnement de l'hélice : l'écoulement φ_2	33
2,2 Problème d'adaptation de l'hélice	33
3 Résolution par la méthode des analogies rhéoelectriques	33
3,1 Représentation du potentiel φ_1	34
3,2 Représentation du potentiel φ_2	34
4 Résultats du calcul analogique	37
5 Poussée totale du système propulsif	41

CHAPITRE IV

**ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE GRILLE D'AUBE
AVEC SOUFFLAGE AU BORD DE FUITE DES PROFILS**

1 Introduction	42
2 Théorie	42
3 Principe de résolution par la méthode analogique	48
4 Grille de profils plans $\beta = 45^\circ$, $a/t = 1$	49
4,1 Représentation de φ_1	49
4,2 Représentation de $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$	51
5 Grille droite	53
5,1 Propriété de symétrie impaire de φ , conditions aux limites	53
5,2 Calcul analogique	53
5,3 Calcul analytique pour les faibles valeurs de C_d	56
5,31 φ_1 , écoulement à l'incidence nulle, soufflage « singulier »	59
5,32 φ_2 , écoulement avec incidence, soufflage « régulier »	60
5,4 Confrontation théorie-expérience	63

CHAPITRE V

**SOUFFLAGE AU BORD DE FUITE
DES PROFILS D'UN DISTRIBUTEUR**

1 Introduction	64
2 Théorie	64

	PAGES
3 Calcul par analogie rhéoelectrique	67
4 Écoulement avec l'angle de soufflage Θ constant	68
5 Écoulement « free vortex » à l'infini aval.....	70

CHAPITRE VI

SOUFFLAGE A L'INTRADOS D'UNE AILE

1 Introduction	74
2 Théorie du soufflage à l'intrados d'un profil	74
3 Résolution analogique du problème	75
3.1 Montage électrique	75
3.2 Calcul des coefficients aérodynamiques	77
4 Résultats	79
5 Calcul analytique pour les faibles C_{μ}	82
6 Confrontation théorie-expérience	85

CHAPITRE VII

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS
AUTOUR DE PROFILS AVEC CAVITATION

1 Introduction	87
2 Vitesses de perturbation. Conditions aux limites	88
3 Profil rectiligne et effet de volet. Résolution analytique	89
4 Potentiel des vitesses de perturbation	100
5 Calcul analogique	104
5.1 Représentation de φ_1	105
5.2 Représentation de φ_2	106
5.3 Composition de φ_1 et φ_2	107
5.4 Expériences et résultats	108
6 Extension de la méthode pour l'étude des profils courbes	112
6.1 Potentiel des vitesses de perturbation.....	113
6.2 Représentation analogique	114
6.3 Expériences et résultats	118
7 Profil courbe avec une incidence quelconque	118
Conclusion	122
BIBLIOGRAPHIE	123

INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de mécanique des fluides, les théories basées sur l'hypothèse des faibles perturbations ont permis d'obtenir commodément de très utiles renseignements sur les propriétés hydrodynamiques et aérodynamiques des obstacles fuselés. On sait d'ailleurs que la plupart des théories classiques des profils, des ailes, des hélices, des carènes, etc., admettent des approximations de cet ordre et que, malgré ces représentations schématiques, les résultats obtenus rendent compte de façon très satisfaisante des phénomènes physiques analysés.

Dans cette étude nous nous sommes proposés d'étendre cette approximation à deux nouvelles classes de phénomènes particulièrement intéressants pour les applications pratiques :

— analyse de l'effet que peut produire, sur un écoulement général, l'introduction d'un soufflage formé par un jet mince émis à grande vitesse d'une fente pratiquée dans une paroi;

— étude de l'influence sur l'écoulement autour d'un corps élané d'un sillage de fluide mort ou d'une cavitation prolongeant l'obstacle.

Le contrôle des écoulements par la technique du soufflage est relativement récente; cette technique intéresse principalement la déviation des jets de réacteurs et l'hypersustentation des ailes. Au cours de ces dernières années, divers schémas théoriques ont été proposés pour rendre compte de l'action d'un jet de soufflage. Certains auteurs, L. C. WOODS [28] et M. KADOCH [5], représentent le souffle émis par une répartition de « sources dirigées » convenablement distribuées sur la paroi, aux alentours de la fente d'éjection. Dans ce cas, l'intensité du jet est nécessairement caractérisé par le débit-masse des sources, or, l'expérience montre que l'effet produit par le jet dépend essentiellement de la quantité de mouvement émise; dès lors, le moyen proposé dans cette théorie pour retrouver cette quantité de mouvements demeure assez arbitraire. En outre, ce schéma ne peut tenir compte de la différence de pression génératrice entre l'écoulement général et l'écoulement dans le jet, et il présente l'inconvénient de ne pas faire apparaître l'effet de « rigidité » du jet ainsi que son effet de réaction.

Une représentation plus satisfaisante de l'action d'un jet mince a été élaborée à propos de l'analyse théorique du phénomène d'hypersustentation d'une aile par soufflage au bord de fuite. Dans un schéma basé sur l'approximation linéaire et exploité indépendamment par L. MALAVARD [14], R. SIESTRUNCK [23], D. A. SPENCE [24] et

H. B. HELMBOLD [4], le jet de soufflage est considéré comme infiniment délié, de sorte qu'il s'insère dans l'écoulement général en y provoquant le même effet que celui d'une ligne de discontinuité de vitesses. La forme de ce filet fluide infiniment délié est *a priori* inconnue, mais la condition de son équilibre au sein du courant qui l'entoure permet, compte tenu de la quantité de mouvement émise, de définir complètement les conditions aux limites relatives au potentiel des vitesses de perturbation de l'écoulement étudié.

Ce dernier schéma a l'avantage d'admettre une interprétation particulièrement aisée dans la méthode de calcul par analogie rhéoelectrique [21], [16]. Les résultats ainsi obtenus ont permis de vérifier la validité des hypothèses admises dans le cas des ailes à jet : la confrontation des prévisions théoriques et des résultats expérimentaux s'est révélée satisfaisante au-delà de ce qu'il était permis d'espérer *a priori*.

Il a paru intéressant, dans ces conditions, d'étendre et de développer ce schéma [9], réservé jusqu'alors à des problèmes de sustentation d'ailes et de profils, à l'analyse théorique de divers types d'écoulements perturbés par l'action d'un jet mince. Les ressources de la méthode d'analogie rhéoelectrique, complétée dans certains cas par la recherche de solutions analytiques, ont permis d'atteindre la plupart des résultats pratiques intéressants pour les applications.

Les problèmes ainsi traités dans les chapitres I à V concernent successivement :

- la déviation d'un jet principal par un jet auxiliaire faiblement incliné;
- l'action d'un jet mince à la sortie périphérique d'un diffuseur;
- l'effet d'un jet mince au bord de fuite du carénage d'une hélice et le problème de l'adaptation de l'hélice;
- l'écoulement autour d'une grille d'aube avec soufflage au bord de fuite des profils;
- le soufflage au bord de fuite d'un distributeur.

Les méthodes exploitées pour traiter les problèmes ci-dessus peuvent être transposées à des questions assez analogues concernant la détermination d'écoulements avec sillage ou d'écoulements autour de profils minces avec poche de cavitation. Dans de récentes études théoriques, M. P. TULIN et M. P. BURKART [26], [27], [25] ont, en effet, introduit un modèle mathématique simplifié pour traiter des problèmes d'écoulements autour d'obstacles élancés supercavitants, dont l'intérêt en hydrodynamique navale est maintenant bien connu. TULIN a, en particulier, montré que, pour un obstacle assez mince, la théorie linéarisée pouvait donner des résultats en bon accord avec ceux obtenus dans des théories exactes; le schéma mathématique utilisé consiste encore à figurer la ligne de courant qui limite le sillage d'HELMHOLTZ ou la poche de cavitation par une condition linéarisée écrite sur la projection suivant la direction de l'écoulement général. En adoptant ce modèle, il est évident que les méthodes analogiques employées pour traiter les problèmes précédemment décrits peuvent, par des modifications convenables être exploitées dans ce nouveau type d'études. Les deux derniers chapitres de ce mémoire concernent ainsi le soufflage avec sillage à l'intrados d'une aile et une première contribution à l'étude des écoulements autour de profils supercavitants.

1 RAPPEL SUR LES MOUVEMENTS FAIBLEMENT PERTURBÉS

Bien que les hypothèses admises dans la théorie des écoulements faiblement perturbés soient classiques, nous croyons utile de les rappeler brièvement dans cette introduction afin d'éviter de fastidieuses répétitions dans les exposés des chapitres qui suivent. Cet aperçu permettra, en particulier, de distinguer plus clairement les divers types de conditions aux limites, susceptibles d'intervenir d'après la nature du problème envisagé.

Les écoulements considérés sont supposés permanents; le fluide est parfait, irrotationnel, incompressible et non pesant. Soit V_0 la vitesse de l'écoulement uniforme de référence, l'axe des x est choisi parallèle à la direction de V_0 . Le potentiel de l'écoulement étudié sera écrit sous la forme :

$$(1) \quad \Phi = V_0 x + \varphi,$$

où φ , qui figure au second membre, caractérise le potentiel des vitesses de perturbation. L'écoulement peut être défini, soit par son potentiel de perturbation φ , soit par son potentiel d'accélération u qui définit la composante suivant Ox de la vitesse de perturbation. Les potentiels φ et u sont des fonctions harmoniques définies par des conditions aux limites strictement liées au problème posé.

Nous admettons l'hypothèse des faibles perturbations autour de l'écoulement uniforme de vitesse V_0 ; dans ces conditions les obstacles sont supposés minces, peu cambrés et faiblement inclinés sur ce vent relatif; les lignes de courant ou les lignes de jet sont astreintes à ne pas trop s'écarter de leur projection suivant l'axe des x . Ainsi, les données aux limites concernant φ ou u et relatives à ces frontières seront écrites sur les projections de celles-ci suivant Ox . Cette approximation est particulièrement commode pour l'étude des écoulements où la forme de certaines frontières (lignes de courant ou ligne de jet) est, *a priori*, inconnue.

Désignons par p_0 la pression de l'écoulement uniforme V_0 et par p la pression en un point de l'écoulement perturbé; la formule de BERNOULLI :

$$(2) \quad p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = p + \rho \frac{V_0^2 + 2 V_0 u + u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

où v et w désignent les composants de la vitesse, suivant Oy , et Oz se réduit, dans le cadre la théorie des faibles perturbations à :

$$(3) \quad p - p_0 = -\rho V_0 u,$$

puisque les termes u^2 , v^2 , w^2 , de second ordre par rapport à $V_0 u$, sont négligeables.

Rappelons enfin que, les fonctions φ et u étant régies par l'équation de LAPLACE qui est linéaire, et que la linéarisation portant aussi sur les conditions aux limites, il est possible de composer plusieurs solutions élémentaires pour obtenir la solution d'un problème posé.

CONDITIONS AUX LIMITES

Ces conditions aux limites dépendent strictement du problème posé, et pour la détermination d'un écoulement particulier il est évidemment nécessaire de les considérer dans leur ensemble; toutefois, nous donnerons ici quelques indications générales sur les types de données aux limites que l'on rencontrera fréquemment dans la suite.

2,1 Condition de glissement sur un profil.

Pour fixer les idées, considérons l'écoulement bidimensionnel autour d'un profil dont la forme est définie par $y(x)$; la condition de glissement de l'écoulement sur le profil s'écrit :

$$(4) \quad (V_0 + u) y'_x - v = 0;$$

dans le cadre des faibles perturbations la composante u est petite devant V_0 , et cette condition se réduit à :

$$(5) \quad v = \varphi'_y = V_0 y'_x$$

et sera imposée sur la projection du profil suivant l'axe des x .

Toutefois, lorsqu'il s'agit d'un écoulement autour d'un *profil rectiligne* (plaque plane), il est toujours recommandé de choisir comme vitesse de référence V_0 , la composante parallèle à la corde du profil de la vitesse à l'infini [1]; il convient alors d'établir un gradient de φ non nul à l'infini tel que :

$$(6) \quad \vec{V}_0 + \overrightarrow{\text{grad } \varphi} = \vec{V}_\infty;$$

le profil étant parallèle à l'axe des x , la condition de glissement devient :

$$(7) \quad v = \varphi'_y = 0,$$

dont la représentation dans le calcul analogique est extrêmement aisée.

2,2 Ligne de jet mince.

Lorsque le jet de soufflage est supposé infiniment mince et que la vitesse d'éjection V_j du jet est grande par rapport à V_0 , des études antérieures [6], [22] ont montré que l'on pouvait admettre que sa valeur demeurerait sensiblement constante le long de la ligne de jet. En désignant par Q_j le débit masse par unité de largeur du jet et par $\mathcal{R}$ son rayon de courbure locale, la forme de la ligne de jet, *a priori* inconnue, est déterminée par sa condition d'équilibre qui s'écrit :

$$(8) \quad p^+ - p^- = \frac{Q_j V_j}{\mathcal{R}},$$

où $p^+ - p^-$ est la différence de pression de l'écoulement principal aux deux bords de la nappe de jet, et p^+ désigne toujours la pression du côté des y croissant de la

ligne de jet. Le rayon de courbure $\mathcal{R}$ est considéré comme positif si la ligne de jet est convexe, négatif dans le cas contraire. Si les filets fluides de l'écoulement en bordure de la ligne de jet ont une pression génératrice identique, la pression en un point quelconque est donnée par la formule de BERNOUILLIE linéarisée et la différence de pression $p^+ - p^-$ devient :

$$(9) \quad p^+ - p^- = -\rho V_0 (u^+ - u^-) = -\rho V_0 (\varphi_{x'}^{+'} - \varphi_{x'}^{-'}).$$

Dans certaines des études qui suivent, il pourra arriver que l'une des pressions, p^+ ou p^- , soit égale à pression constante p_0 d'un fluide mort; on rencontrera aussi des cas où le champ des vitesses de perturbation présentera une symétrie impaire par rapport à la projection suivant l'axe des x de la ligne de jet; enfin, dans certain cas particulier, la pression génératrice pourra être différente dans les écoulements de part et d'autre de la ligne de jet; ces conditions particulières apportent certaines modifications à l'expression (9), nous reviendrons sur ces questions plus tard dans l'étude de chaque cas traité.

Si $y(x)$ est l'équation de la forme du jet, d'après la convention de signe adoptée, la courbure $\frac{1}{\mathcal{R}}$ du jet est donnée par :

$$(10) \quad \frac{1}{\mathcal{R}} = - \frac{y''_{xx}}{|1 + (y'_{xx})^2|^{3/2}}$$

pour le fluide extérieur, la ligne de jet est une ligne de courant et peut être considérée comme une paroi matérielle, sur laquelle la condition de glissement s'écrit :

$$(11) \quad v = \varphi'_y = V_0 y'_{xx}.$$

Dans l'expression (10), le terme $(y'_{xx})^2 = \left(\frac{v}{V_0}\right)^2$ est négligeable, et de plus y''_{xx} peut être remplacé par $\frac{\varphi''_{yyx}}{V_0}$; il résulte de ceci et de l'expression (9) que l'équation (8) devient :

$$(12) \quad \varphi_{x'}^{+'} - \varphi_{x'}^{-'} = \frac{Q_j V_j}{\rho V_0^2} \varphi''_{yyx}$$

ou bien

$$(13) \quad u^+ - u^- = \frac{Q_j V_j}{\rho V_0^2} u'_{yy}.$$

Cette condition sera imposée sur la projection de la ligne de jet suivant l'axe des x . En intégrant l'équation (12) par rapport à x , on obtient encore :

$$(14) \quad \varphi^+ - \varphi^- = \frac{Q_j V_j}{V_0^2} \varphi'_{yy} + C,$$

où C désigne une constante d'intégration. Les équations (13) ou (14) définissent respectivement la condition que doivent vérifier les fonctions u ou φ ; c'est une condition du type de FOURIER dont la représentation dans le calcul d'analogie rhéoelectrique est particulièrement commode.

2,3 Ligne de courant à pression constante.

Sur la ligne de courant qui forme la frontière entre l'écoulement et un fluide mort à pression constante, lorsque cette pression est égale à la pression statique de l'écoulement uniforme de vitesse V_0 , autour de laquelle la linéarisation est faite, on peut écrire, d'après la formule de BERNOULLI linéarisée :

$$(15) \quad u - \varphi' = 0,$$

cette condition sera portée sur la projection de la ligne de courant suivant l'axe des x ; si l'on s'intéresse à la fonction φ , on pourra encore intégrer par rapport à x , et (15) entraînera que le potentiel φ soit égal à une constante ou à zéro sur cette projection.

Dans le cas où la ligne de courant forme la limite d'une poche de cavitation où la pression constante n'est pas égale à p_0 , on en déduit que u ou φ' doit être constant sur la projection de la ligne de courant; par conséquent, la valeur de φ suit une loi linéaire de l'abscisse x . Par ailleurs, il est toujours possible, en incorporant un écoulement uniforme artificiel dans le potentiel φ , de se ramener à la condition de « $\varphi = \text{constant}$ » sur cette projection; cette remarque est intéressante car, dans le calcul analogique, l'imposition d'un potentiel constant sur une frontière est beaucoup plus commode à réaliser.

DÉVIATION D'UN JET PRINCIPAL PAR UN JET AUXILIAIRE FAIBLEMENT INCLINÉ

INTRODUCTION

Pour les avions à réaction, par une déviation dissymétrique du jet du réacteur, il est possible de provoquer des couples dont l'effet peut, dans certains cas, remplacer celui des gouvernes classiques. Par une déviation symétrique du jet et en le renvoyant vers l'amont au moyen des anneaux de grilles défectrices, on peut créer un freinage de l'avion à partir de la poussée propre du réacteur. Il existe plusieurs moyens pour dévier un jet. Dans l'étude théorique que nous avons envisagée ici, nous nous sommes limités au problème plan de la déviation d'un jet par soufflage transversal d'un mince et intense jet auxiliaire [8]. Ce problème a été traité par M. KADOSCH [5] qui représente le soufflage par une distribution de « sources dirigées », l'intensité du soufflage étant alors caractérisée par le débit masse éjectée; cette approche théorique du problème rend difficilement compte de l'influence du paramètre fondamental qui régit le phénomène physique, c'est-à-dire de la quantité de mouvement émise. Nous avons préféré aborder cette étude en adoptant le schéma proposé par L. MALAVARD pour représenter le jet mince d'un soufflage au bord de fuite d'une aile : on sait que dans ce cas l'intensité du soufflage peut alors être facilement caractérisée par sa quantité de mouvement.

THÉORIE LINÉARISÉE

D'un canal rectiligne, indéfini de largeur, débouche un jet principal dans une atmosphère à la pression p_0 . Ce jet principal est dévié par un mince jet auxiliaire de débit Q_j sortant, sous une inclinaison θ et avec une vitesse d'éjection V_j , d'une fente F placée sur un bord du canal à la distance d de la section de sortie OO' (*fig. 1 a*). Si nous supposons que l'axe MO est un axe de symétrie, les conditions précédentes permettent d'interpréter la déviation symétrique du jet.

À l'amont, l'écoulement dans le canal possède une vitesse V_1 ; à l'infini aval, le jet principal complètement dévié d'un angle θ , retrouve une vitesse uniforme dont

la composante horizontale est V_0 , et l'effet de striction provoqué par le jet auxiliaire impose que $V_0 > V_1$.

Le jet principal est limité, à sa partie supérieure, par la courbe $O'I$, le long de laquelle règne la pression ambiante p_0 , et, à sa partie inférieure, par le filet fluide FJ qui schématise le jet auxiliaire supposé infiniment délié. Les formes de ces courbes ne sont pas connues *a priori*, mais, cependant, déterminées par des conditions d'équilibre de pression à leur frontière. Si l'angle θ est petit, on peut admettre l'hypothèse des faibles perturbations et, dans le cadre de la théorie linéarisée écrire les conditions aux limites qui définissent ces frontières sur leur projection Ox' et Fx .

La composante horizontale V_0 de l'écoulement à l'infini aval est prise comme vitesse de référence autour de laquelle la linéarisation sera faite. On peut définir l'écoulement par son potentiel des vitesses de perturbation $\varphi(x, y)$ qui est régi par les conditions aux limites suivantes (fig. 1 b) :

a) à l'infini amont (section $M'M$), on a $(\varphi'_{x'})_{x \rightarrow \infty} = V_1 - V_0 < 0$. A l'infini aval (section xx'), on a $(\varphi'_{x'})_{x \rightarrow \infty} = 0$;

b) le long des parois du canal, c'est-à-dire suivant MF et $M'O'$, on a $\varphi'_y = 0$;

c) sur la frontière supérieure du jet, ligne $O'I$, la pression est égale à p_0 ; avec l'approximation adoptée on écrira donc $\varphi'_x = 0$ sur $O'x'$ ou encore $\varphi = \varphi_0$;

d) la condition d'équilibre du filet fluide constituant le jet auxiliaire, écrite sur sa projection Fx , donne :

$$(1) \quad \rho V_0 \varphi'_{x'} = \frac{Q_j V_j}{V_0} \varphi''_{yx}.$$

En intégrant et en introduisant un coefficient C_μ :

$$(2) \quad C_\mu = \frac{Q_j V_j}{\rho V_0^2 l},$$

qui représente le rapport entre les quantités de mouvement du jet auxiliaire et du jet principal, on obtient :

$$(3) \quad \varphi = C_\mu l \varphi'_y + \bar{\varphi}.$$

Cette condition écrite au point F et à l'infini aval permet de déduire les angles Θ et θ :

$$(4) \quad V_0 \Theta = \frac{\varphi_F - \bar{\varphi}}{C_\mu l}.$$

$$(5) \quad V_0 \theta = \frac{\varphi_\infty - \bar{\varphi}}{C_\mu l};$$

e) au point O' la vitesse est encore tangente à la paroi $M'O'$, d'où la condition $(\varphi'_y)_{O'} = 0$.

CALCUL ANALOGIQUE RHÉOÉLECTRIQUE

La détermination de $\varphi(x, y)$ a été obtenue au moyen de la méthode d'analogie rhéoélectrique en identifiant cette fonction harmonique au potentiel électrique d'une cuve rectangulaire $MM'xx'$ à fond horizontal. Le montage analogique est représenté sur la *figure 1 c*. Les frontières MF et $M'O'$ sont isolantes d'après *b*). Le bord $O'x'$ est formé par une électrode portée au potentiel φ_0 par le potentiomètre P . La partie Fx est recouverte de petites électrodes de largeur et de hauteur h , que l'on alimente, à partir d'un potentiel $\bar{\varphi} = 0$, à travers des résistances r ; on sait que ce montage satisfait automatiquement la condition (3) du type de FOURIER en prenant $r = \frac{C_\mu l}{\sigma \varepsilon h}$ [13] (où σ désigne la conductivité du modèle analogique). Le bord xx' est isolant d'après *a*), et le bord MM' est formé par une électrode alimentée à partir du potentiel 100 à travers une résistance r_1 , pour figurer l'écoulement uniforme amont de $(\varphi'_x)_{-\infty}$, on aura :

$$6) \quad (\varphi'_x)_{-\infty} = \frac{\varphi_0}{\sigma l h r_1} 100,$$

où lh représente l'aire de l'électrode MM' . Enfin, une sonde placée sur Oy au voisinage immédiate de O' permet de remplir la condition *e*), soit $(\varphi'_y)_{O'} = 0$, en réglant φ_0 au moyen du potentiomètre P pour que la ligne potentielle de même valeur soit tangente à Oy en ce point O' .

Remarquons qu'à l'infini aval, φ'_y tend vers la valeur constante $V_0 \theta$; il en résulte une composante d'un champ uniforme dirigé suivant l'axe des y ; la différence de potentiel $\varphi_0 - \varphi_\infty$ doit fournir la valeur $lV_0 \theta$. On peut se demander si la valeur ainsi déduite coïncide avec celle donnée par l'équation (5) : l'expérience montre que si la relation $r = \frac{C_\mu l}{\sigma \varepsilon h}$ est bien satisfaite, l'accord est observé. Donc, tout changement fortuit de la résistivité $\frac{1}{\sigma}$ de l'eau dans la cuve doit être accompagné par une modification correspondante de la hauteur h , afin d'assurer l'égalité $r = \frac{C_\mu l}{\sigma \varepsilon h}$ si l'on veut conserver la même valeur de C_μ pour une série de résistance r bien déterminées. D'ailleurs, la condition :

$$7) \quad \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} C_\mu,$$

qui résulte de l'élimination de $V_0 \theta$, peut servir de critère dans le réglage de la hauteur h de l'eau.

RÉSULTATS

Le rapport $\frac{\theta}{\Theta}$ entre l'angle de déviation et l'angle de soufflage Θ se déduit de (4) et (5), on a :

$$8) \quad \frac{\theta}{\Theta} = \frac{\varphi_\infty - \bar{\varphi}}{\varphi_F - \bar{\varphi}}.$$

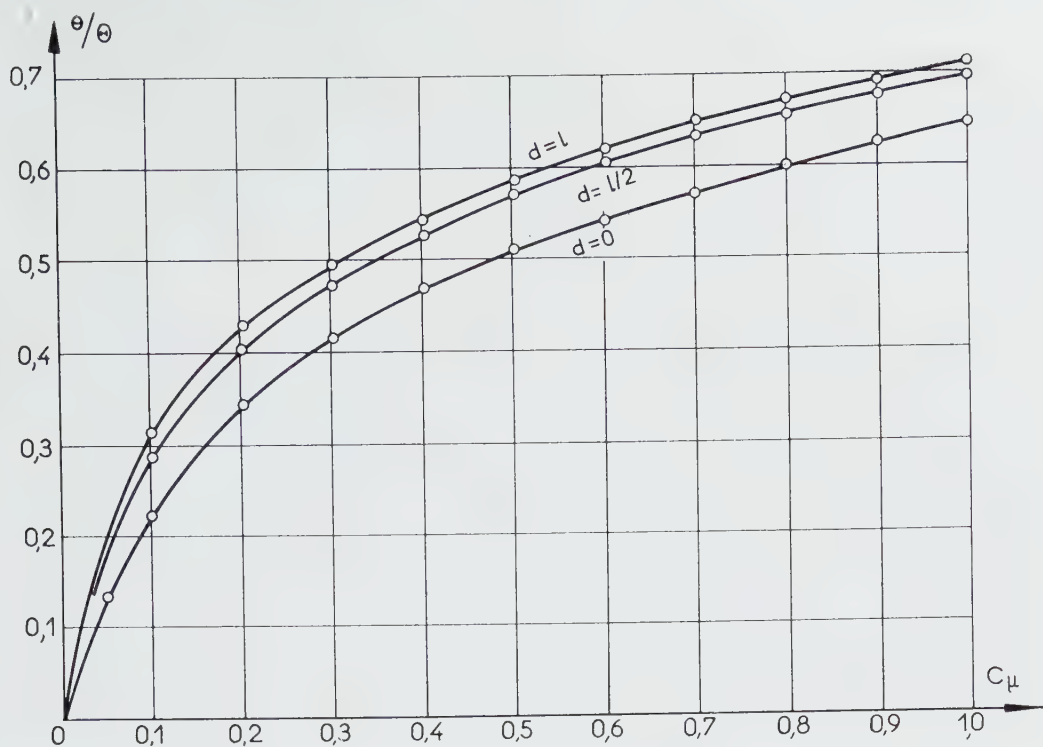


Fig. 2

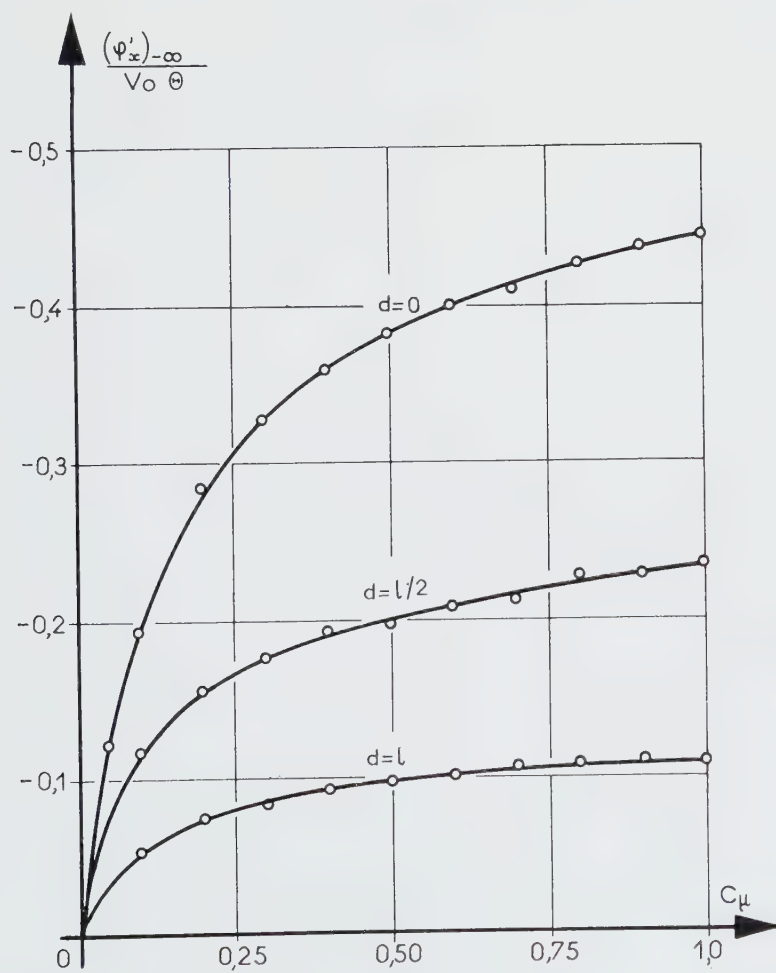


Fig. 3

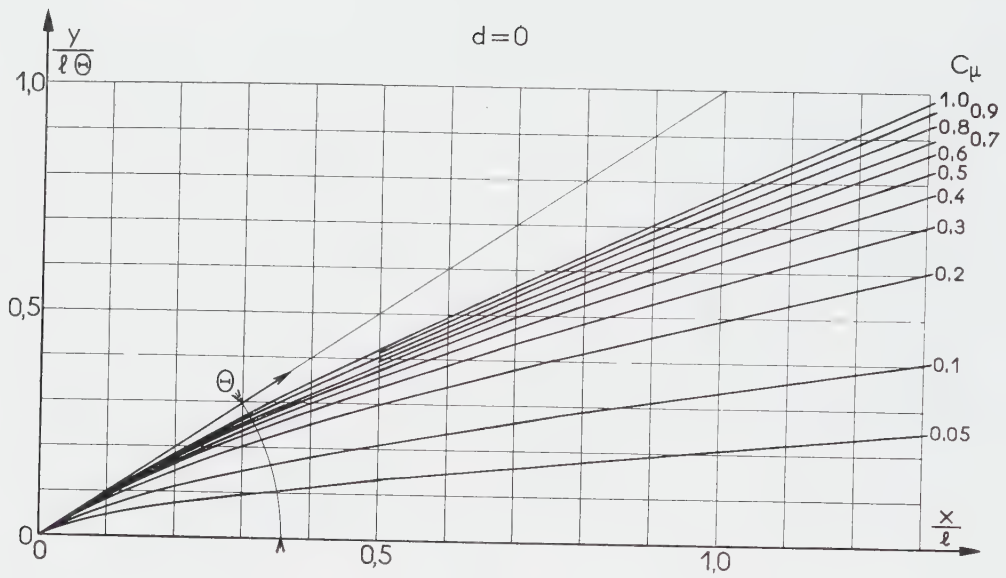


Fig. 4 a

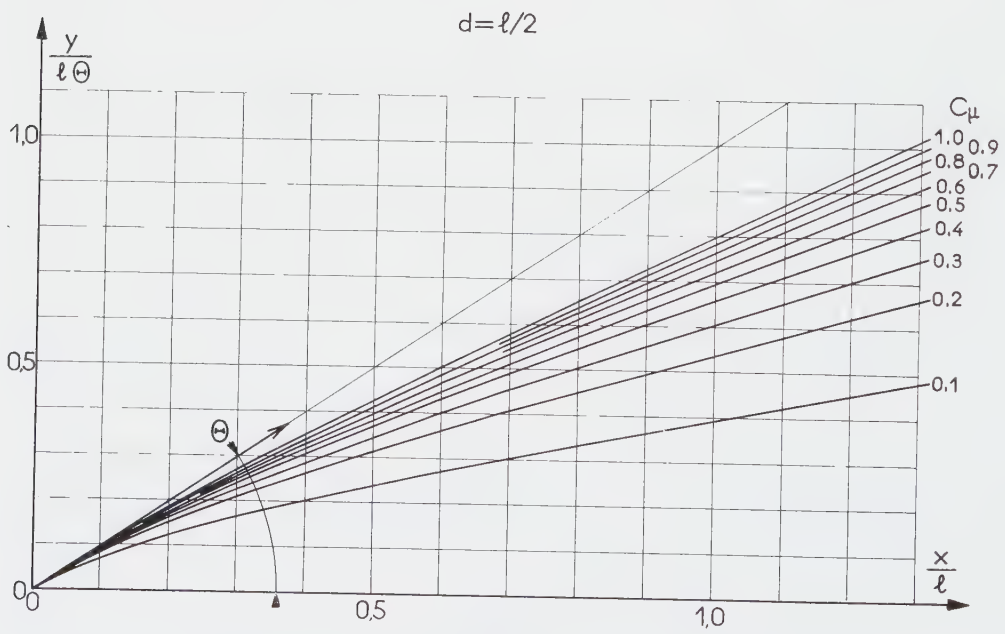


Fig. 4 b

La vitesse V_1 de l'écoulement à l'amont est $V_1 = V_0 + (\varphi'_r)_{-\infty}$, or le rapport $\frac{(\varphi'_r)_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ peut être déduit du calcul analogue, d'après (4) et (6) on a :

$$(9) \quad \frac{(\varphi'_r)_{-\infty}}{V_0 \Theta} = \frac{C_\mu}{\tau h r_1} \left(\frac{\varphi_{-\infty} - 100}{\varphi_r - \bar{\varphi}} \right),$$

et on peut ainsi définir le coefficient de striction $\lambda = \frac{V_1}{V_0}$.

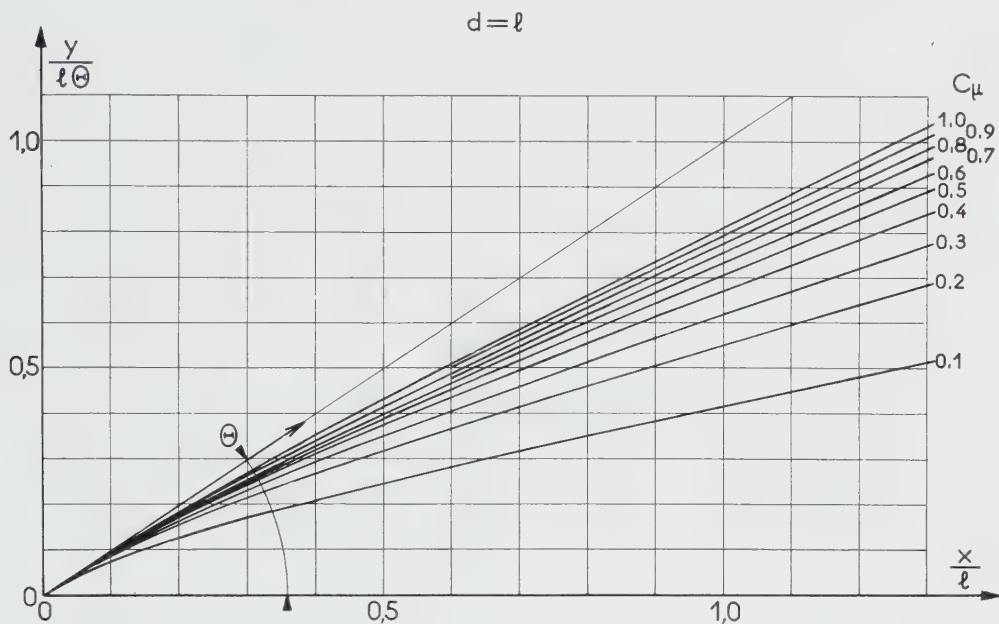


Fig. 4 c

Les calculs analogiques ont été effectués pour diverses valeurs du paramètre $\frac{d}{l}$ ($= 1; 1/2$ et 0), et pour différentes valeurs de C_μ : $0 < C_\mu < 1,0$. La mesure du potentiel aux électrodes donne les résultats cherchés :

- la variation de $\frac{\Theta}{\Theta}$ en fonction de C_μ (fig. 2);
- la variation de $\frac{(\varphi'_r)_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ en fonction de C_μ (fig. 3);
- la forme des lignes de jet pour diverses valeurs de C_μ (fig. 4).

5

APPROXIMATION POUR LES FAIBLES C_μ

Pour de faibles valeurs de C_μ on peut faire une approximation sur le modèle du calcul analogue en remplaçant les résistances r , pour alimenter les électrodes dans la partie Fx , par un décrochement FEN dont la longueur FE est fixée à $C_\mu l$

(fig. 5 a). Les conditions aux limites pour la fonction $\varphi(x, y)$ dans ce domaine se résument comme suit :

- a) à l'infini amont $(\varphi'_{x'})_{-\infty} = V_1 - V_0$, et à l'infini aval $(\varphi'_{x'})_{+\infty} = 0$, $(\varphi'_y)_{+\infty} = V_0 \theta$;
- b) sur MF, FE et M'O' la dérivée normale de φ est nulle;
- c) sur O'x', $\varphi = \varphi_0$;
- d) sur EN, $\varphi = \bar{\varphi}$;
- e) O' est un point d'arrêt où $(\varphi'_{x'})_{O'} = 0$ et $(\varphi'_y)_{O'} = 0$.

À l'infini aval, la circulation due à la vitesse uniforme $(\varphi'_y)_{+\infty} = V_0 \theta$, suivant le trajet Nx' qui a comme longueur $l + C_\mu l$, permet de déduire la relation :

$$(10) \quad V_0 \theta = l \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{(1 + C_\mu) l}.$$

Le rapport $\frac{\theta}{\Theta}$ sera calculé à l'aide des équations (4) et (10), on a :

$$(11) \quad \frac{\theta}{\Theta} = \frac{C_\mu}{(1 + C_\mu)} \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{\varphi_F - \bar{\varphi}}.$$

La transformation de SCHWARZ [17] :

$$(12) \quad \frac{dz}{d\zeta} = K \frac{(\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta(\zeta - \zeta_E)^{1/2}},$$

permet de passer du domaine, limité par x'M'MFEN, du plan z au demi-plan supérieur ζ (fig. 5 b). Les points x' , M', M, F, E et N sont représentés respectivement par :

$$\zeta_{x'} = -\infty, \quad \zeta_{M'} = \zeta_M = 0, \quad \zeta_F = 1, \quad \zeta_E = (1 + C_\mu)^2 \quad \text{et} \quad \zeta_N = +\infty.$$

La position du point $\zeta_{O'}$ dépend à la fois du paramètre $\frac{d}{l}$ et de la valeur C_μ , toutefois nous la déterminons en admettant que $C_\mu = 0$, et nous obtenons :

$$(13) \quad \zeta_{O'} = -1/e^{\pi d/l},$$

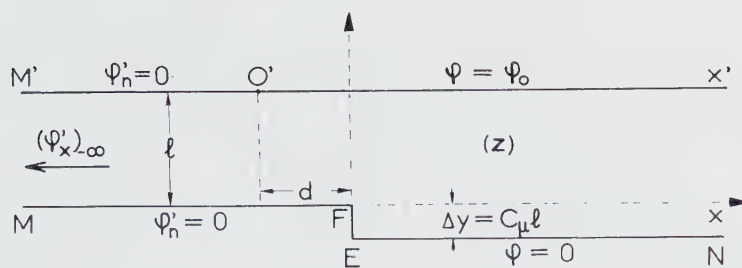
cette approximation est admissible tant que la valeur de C_μ est faible.

Ensuite, la transformation :

$$(14) \quad \zeta - \frac{\zeta_E + \zeta_{O'}}{2} = \frac{\zeta_E - \zeta_{O'}}{4} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)$$

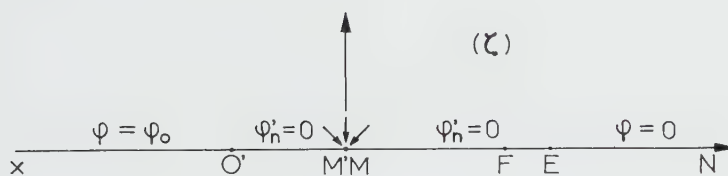
fait passer du plan ζ au plan Z , le segment O'MFE est transformé en un demi-cercle de rayon égal à l'unité (fig. 5 c). Dans le plan Z , φ est égal à $\bar{\varphi}$ sur EN et égal à φ_0 sur x'O'; sur le cercle de l'unité, la dérivée normale de φ est nulle, dont la circonférence est une ligne de courant; au point Z_M il y a une source de débit $2l(\varphi'_{x'})_{-\infty}$. Compte tenu de ces conditions, la fonction est donnée par :

$$(15) \quad \varphi = \Re \left[\frac{l(\varphi'_{x'})_{-\infty}}{\pi} \log \frac{Z - Z_M}{Z} + i \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{\pi} \log Z + \varphi \right],$$



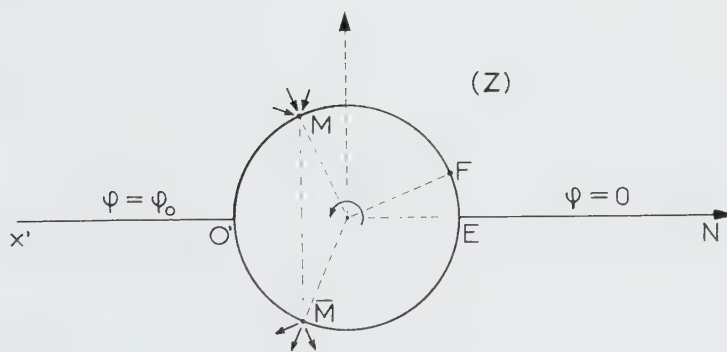
(A)

Fig. 5 a



(B)

Fig. 5 b



(C)

Fig. 5 c

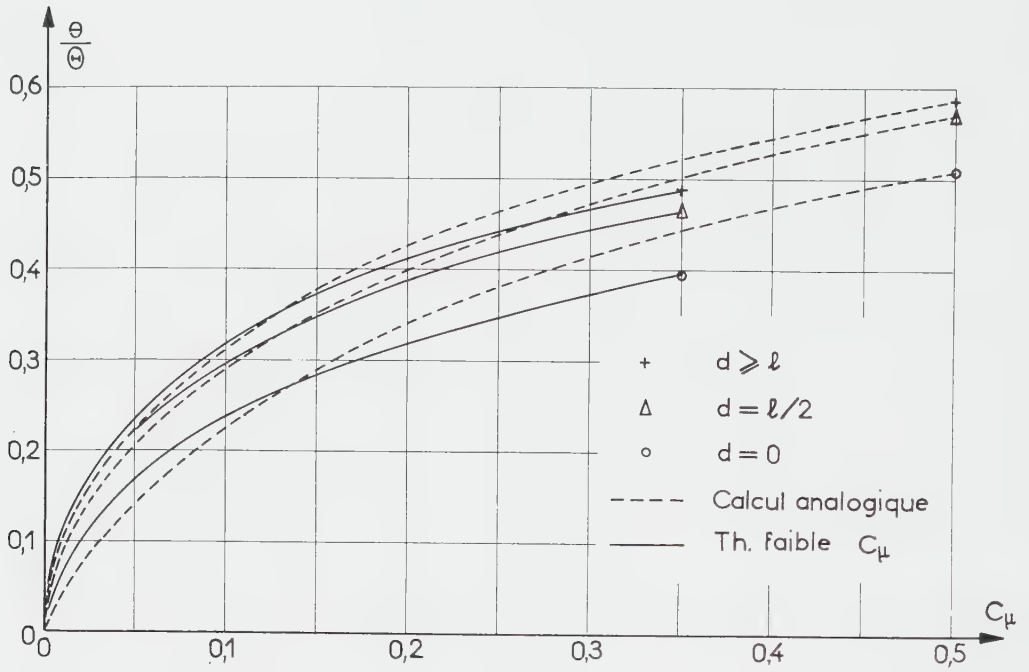


Fig. 6

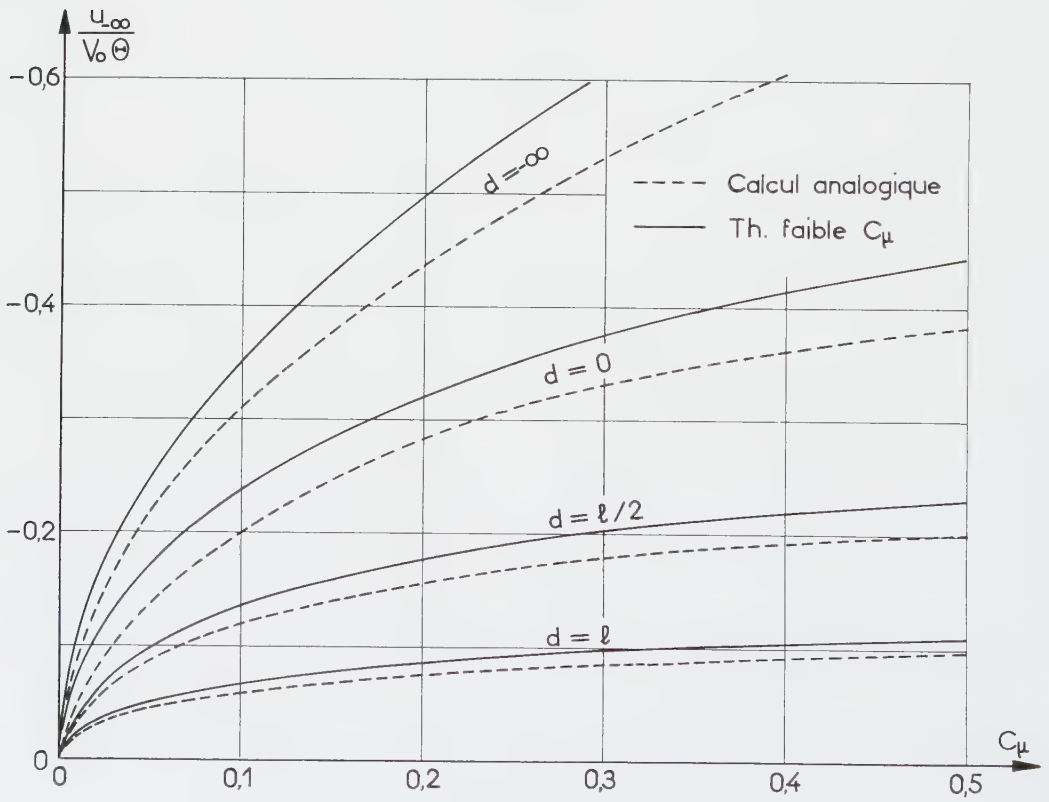


Fig. 7

où $\bar{Z}_M$ désigne le point conjugué de Z_M . La valeur de $(\varphi'_x)_{-\infty}$ est déterminée en écrivant que le point $Z_0 = -1$ est un point d'arrêt, on a :

$$(16) \quad (\varphi'_x)_{-\infty} = \frac{1}{(1 + C_\mu) e^{\pi d/2l}} \cdot \frac{\bar{\varphi} - \varphi_0}{l}$$

et, compte tenu de (10), on a finalement :

$$(17) \quad \frac{(\varphi'_x)_{-\infty}}{V_0 \Theta} = - \frac{1}{e^{\pi d/2l}}.$$

En éliminant $(\varphi'_x)_{-\infty}$ dans l'expression (15), on trouve :

$$(18) \quad \frac{\varphi_F - \bar{\varphi}}{\varphi_0 - \bar{\varphi}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + C_\mu) e^{\pi d/2l}} \log \left| \frac{Z_F - \bar{Z}_M}{Z_F - Z_M} \right| + \frac{1}{\pi} \arg Z_F,$$

et, après calcul, on obtient :

$$(19) \quad \frac{\varphi_F - \bar{\varphi}}{\varphi_0 - \bar{\varphi}} = \frac{2\sqrt{2C_\mu}}{\pi(1 + C_\mu)\sqrt{1 + e^{-\pi d/l}}} (1 + C_\mu + e^{-\pi d/l}),$$

où les termes infiniment petits d'ordre supérieur en C_μ sont négligés.

En appliquant les équations (11) et (19), on obtient la formule suivante :

$$(20) \quad \frac{\Theta}{\Theta} = \frac{\pi\sqrt{1 + e^{-\pi d/l}}}{4(1 + C_\mu + e^{-\pi d/l})} \sqrt{2C_\mu}.$$

Des relations (17) et (20), on a aussi la formule :

$$(21) \quad \frac{(\varphi'_x)_{-\infty}}{V_0 \Theta} = - \frac{\pi\sqrt{1 + e^{-\pi d/l}}}{4(1 + C_\mu + e^{-\pi d/l})\sqrt{e^{\pi d/l}}} \sqrt{2C_\mu}.$$

Les résultats donnés par les formules (20) et (21) sont représentés sur les figures 6 et 7. A titre de comparaison, on a reproduit sur ces figures les courbes correspondantes obtenues par le calcul analogique.

Les écarts entre les courbes de l'approximation adoptée et celles du calcul analogique sont assez notables; les différences semblent dues à la cause suivante : comme on a remplacé les résistances r par le décrochement FEN dans le calcul de faibles C_μ , les lignes de courant de l'écoulement de perturbation envisagé ne sont plus contraintes à suivre, dans la bande FEN x , la direction parallèle à l'axe des y ; ces lignes de courant s'inclinent sous l'action de la source qui se trouve à l'infini amont, la distorsion de ces lignes est particulièrement accentuée près du point F et a certainement une influence sur la valeur de φ_F en ce point et, par conséquent, sur la valeur de Θ d'après (4).

CHAPITRE II

ACTION D'UN JET MINCE A LA SORTIE PÉRIPHÉRIQUE D'UN DIFFUSEUR

1

INTRODUCTION

Un volet fluide obtenu par soufflage à l'extrémité de la partie divergente d'un diffuseur est susceptible de provoquer un effet d'évasement de la veine à la sortie de l'écoulement interne; cet effet est analogue à celui que donnerait un prolongement de la partie divergente du diffuseur, il permet ainsi d'agir sur le rapport des vitesses d'entrée et de sortie. Le soufflage peut, en outre, faciliter le contrôle de la couche limite et ainsi empêcher des décollements dans la partie divergente; son action peut être particulièrement favorable pour les diffuseurs courts à grand angle d'ouverture.

Par ailleurs, le jet, par effet d'induction, peut transmettre une partie de son énergie cinétique à l'écoulement principal et participer ainsi au fonctionnement d'une soufflerie dont le courant d'air serait entraîné en partie par le soufflage sortant des lèvres du diffuseur.

Bien que l'étude présente soit basée sur une théorie linéarisée, les résultats obtenus doivent fournir d'utiles indications sur la variation des caractéristiques de l'écoulement dans la veine avec l'intensité et l'orientation du soufflage [9];

2

THÉORIE

Du point de vue théorique, il est commode de distinguer les deux cas suivants :

1^o cas d'un diffuseur avec soufflage tangentiel à l'extrémité du divergent (soufflage régulier);

2^o cas d'une tuyère droite avec un volet fluide annulaire divergent (soufflage singulier), le rôle du diffuseur est alors entièrement joué par le volet fluide.

La superposition des résultats des deux cas précédents fournit le résultat correspondant au cas général : diffuseur avec un volet fluide divergent aux lèvres de sortie. Nous traiterons d'abord les problèmes concernant les diffuseurs de révolution; les principes développés seront ensuite adaptés aisément pour traiter les écoulements bidimensionnels.

L'écoulement est linéarisé autour de la vitesse V_0 de l'écoulement uniforme qui s'établit à l'infini aval, il peut être défini, soit par le potentiel des vitesses de perturbation φ , soit par le potentiel d'accélération $u = \varphi'_x$, suivant que leurs conditions aux limites sont plus ou moins commodes à réaliser dans la représentation analogique.

2,1 Diffuseur avec soufflage « régulier ».

L'écoulement est représenté sur la *figure 8 a*. Dans ce cas, il est plus avantageux de considérer le potentiel d'accélération u . C'est une fonction harmonique de révolution régie par les conditions aux limites suivantes (*fig. 8 b*) :

a) dans la veine à l'infini amont la vitesse de l'écoulement est $V_1 (> V_0)$, d'où : $u = V_1 - V_0$; comme l'écoulement est uniforme, on a $(u'_x)_{-\infty} = 0$. A l'infini aval, on a aussi $(u'_x)_{+\infty} = 0$;

b) la condition de glissement exige que $v = 0$ sur $x'x$ et MO , et $v = -V_0\Theta$ sur Of (projection de OF) soit $v'_x = 0$, d'où $u'_y = 0$ sur ces frontières;

c) en traversant le point O , la composante v de la vitesse de l'écoulement est discontinue, elle passe de la valeur zéro à $-V_0\Theta$; le point O est donc un point singulier où $u \rightarrow \infty$;

d) sur ff projection de la ligne de jet, la condition d'équilibre de la nappe de jet s'écrit :

$$(1) \quad \varphi V_0 u = \frac{Q_j V_j}{V_0} u'_y,$$

Soit, en introduisant le coefficient :

$$(2) \quad C_{\mu} = \frac{4 Q_j V_j}{\varphi V_0^2 D},$$

qui représente le rapport entre la quantité de mouvement débitée par le soufflage et celle de l'écoulement principal, la condition :

$$(3) \quad u = \frac{C_{\mu} D}{4} u'_y.$$

Pour un diffuseur de $\frac{L}{D}$ donné, le rapport entre la survitesse u dans la veine en amont et la valeur de $V_0\Theta$ est une fonction de C_{μ} que l'on désignera par $G(C_{\mu})$; cette fonction sera déterminée par le calcul analogique.

2,2 Tuyère droite avec soufflage « singulier ».

L'écoulement est représenté par la *figure 9 a*, il est défini, dans ce cas, par son potentiel des vitesses de perturbation φ . C'est une fonction harmonique de révolution régie par les conditions aux limites suivantes (*fig. 9 b*) :

a) à l'infini amont, on a $(\varphi'_x)_{-\infty} = V_1 - V_0$. A l'infini aval, on a $(\varphi'_x)_{+\infty} = 0$;

b) sur l'axe de symétrie $x'x$ et sur la paroi MF , la condition de glissement s'écrit $\varphi'_y = 0$.

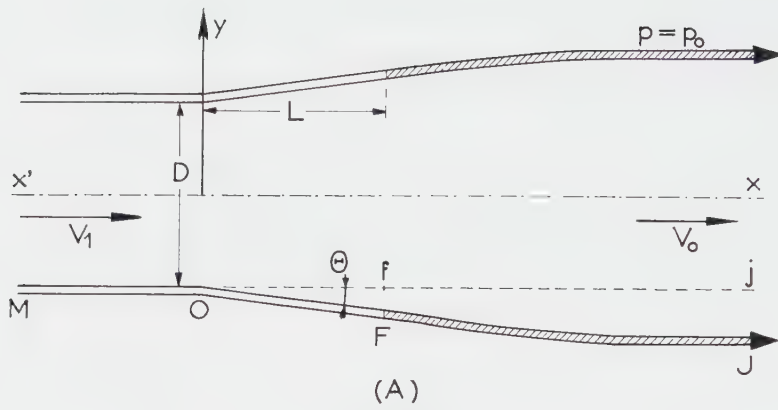


Fig. 8 a

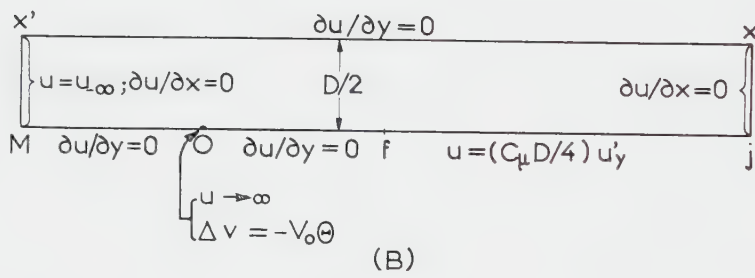


Fig. 8 b

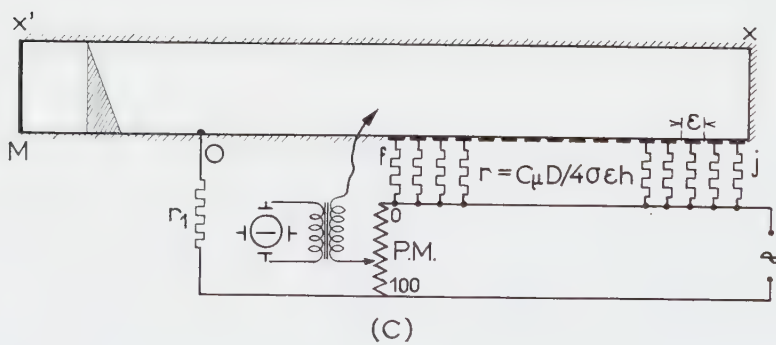


Fig. 8 c

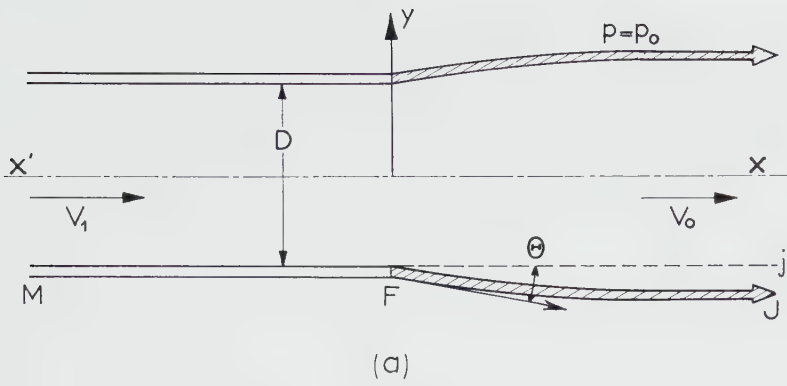


Fig. 9 a

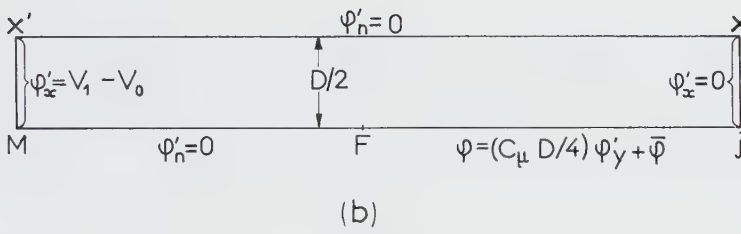


Fig. 9 b

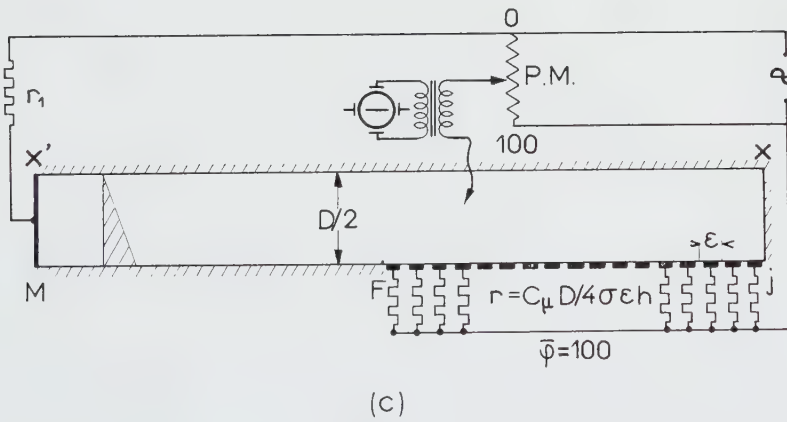


Fig. 9 c

c) sur la projection de la ligne de jet Fj , l'équilibre de la nappe de jet s'écrit :

$$(4) \quad \varphi = \frac{C_\mu D}{4} \varphi'_y + \bar{\varphi},$$

qui résulte de l'intégration de l'équation (3). En écrivant cette condition au point F , on en déduit l'angle de soufflage par :

$$(5) \quad V_0 \Theta = 4 \frac{\bar{\varphi} - \varphi_F}{C_\mu D}.$$

Le rapport entre la survitesse $(\varphi'_x)_{-\infty}$ en amont et la valeur de $V_0 \Theta$ est une fonction de C_μ que l'on désignera par $F(C_\mu)$; cette fonction sera déterminée par le calcul analogue.

2,3 Diffuseur avec soufflage « singulier ».

Si l'on désigne par φ_1 le potentiel de perturbation de l'écoulement dans un diffuseur avec soufflage « régulier » et par φ_2 le potentiel de perturbation de l'écoulement dans une tuyère droite avec soufflage « singulier », il est facile de montrer que la superposition de φ_1 et φ_2 fournit le potentiel de perturbation correspondant à un écoulement dans le même diffuseur avec un soufflage « singulier », c'est-à-dire que le volet fluide obtenu par soufflage est divergent à la sortie. En désignant par Θ_1 l'angle qui caractérise la conicité du divergent du diffuseur, et par Θ l'angle de soufflage par rapport à l'axe des x , la vitesse de l'écoulement dans la veine en amont sera donnée par :

$$(6) \quad V_1 = V_0 + V_0 \Theta_1 G(C_\mu) + V_0 (\Theta - \Theta_1) F(C_\mu),$$

où $F(C_\mu)$ et $G(C_\mu)$ sont les fonctions qui correspondent aux écoulements décrits précédemment.

3

CALCUL ANALOGIQUE ET RÉSULTATS

La solution pratique des problèmes précédents est obtenue par la méthode des analogies rhéoelectriques en identifiant les fonctions harmoniques de révolution u ou au potentiel électrique d'une cuve à fond incliné [12].

3,1 Diffuseur avec soufflage « régulier ».

Le potentiel d'accélération u sera identifié au potentiel électrique, la *figure 8 c* représente le montage analogue. La partie de la *figure 8 a* située au-dessous de l'axe de révolution est figurée par la cuve à fond incliné. Le bord $x'M$ considéré comme représentant l'infini amont est formé par une électrode non alimentée, et le bord xj considéré comme correspondant à l'infini aval est isolant d'après *a*). L'axe $x'x$ est l'axe de la cuve, et les parties MO et Of sont isolantes pour avoir $u'_y = 0$ d'après *b*). La partie ff est recouverte de petites électrodes de largeur ε et de hauteur h , ces

électrodes sont alimentées à partir du potentiel zéro à travers des résistances $r = \frac{C_\mu D}{4 \sigma \varepsilon h}$ pour assurer la condition (3) [13]. Une petite électrode semi-cylindrique est collée au point O pour figurer la singularité, elle est alimentée à partir du potentiel maximal 100 à travers une résistance r_1 . On sait que la composante v de la vitesse de l'écoulement sur la partie Of est donnée par $\int_x^{x'} u'_y dx$, or la dérivée u'_y est partout nulle sauf au point O où elle tend vers l'infini, mais l'intégrale admet une limite finie qui n'est autre que le flux traversant la singularité en O, on a ainsi, dans la transposition analogue, la relation :

$$(7) \quad V_0 \Theta = \frac{1}{\sigma h} \cdot \frac{100 - u_0}{r_1}.$$

D'après les mesures effectuées dans la cuve, il est facile de déduire les rapports $\frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ correspondants aux différentes valeurs de C_μ , c'est-à-dire la fonction $G(C_\mu)$. Les résultats sont représentés sur la *figure 10* pour les diffuseurs dont le rapport $\frac{L}{D}$ prend les valeurs : 0,5, 0,75 et 1.

REMARQUE. — La représentation du potentiel des vitesses de perturbation de cet écoulement, au lieu de son potentiel d'accélération, aurait conduit à une condition de NEUMANN $\varphi'_y = -V_0 \Theta$ à afficher sur la partie Of et, en même temps, à une condition de la continuité de la dérivée normale de φ au point f. Le montage électrique aurait été plus compliqué et la réalisation aurait demandé un réglage plus délicat.

3,2 Tuyère droite avec soufflage « singulier ».

Le montage analogue est représenté sur la *figure 9 c*. La maquette utilisée reste la même que celle du cas précédent, toutefois la singularité en O est enlevée. L'électrode $x'M$ est alimentée à partir du potentiel zéro à travers une résistance r_1 pour figurer la vitesse de perturbation à l'infini amont, on a :

$$(8) \quad (\varphi'_x)_{-\infty} = \frac{\varphi_{-\infty}}{\sigma S r_1},$$

où S représente l'aire de l'électrode $x'M$. Les électrodes de Fj sont alimentées, à partir du potentiel $\varphi = \bar{\varphi} = 100$, à travers des résistances $r = \frac{C_\mu D}{4 \sigma \varepsilon h}$ pour assurer la condition (4). D'après les relations (5) et (8), le rapport entre la survitesse $(\varphi'_x)_{-\infty}$ en amont et la valeur $V_0 \Theta$, c'est-à-dire la fonction $F(C_\mu)$, est donnée par :

$$(9) \quad \frac{(\varphi'_x)_{-\infty}}{V_0 \Theta} = F(C_\mu) = \frac{C_\mu D}{4 (\bar{\varphi} - \varphi_F)} \cdot \frac{\varphi_{-\infty}}{\sigma S r_1}.$$

Le résultat du calcul analogue est présenté sur la *figure 10*, il correspond à la courbe marquée $L = 0$.

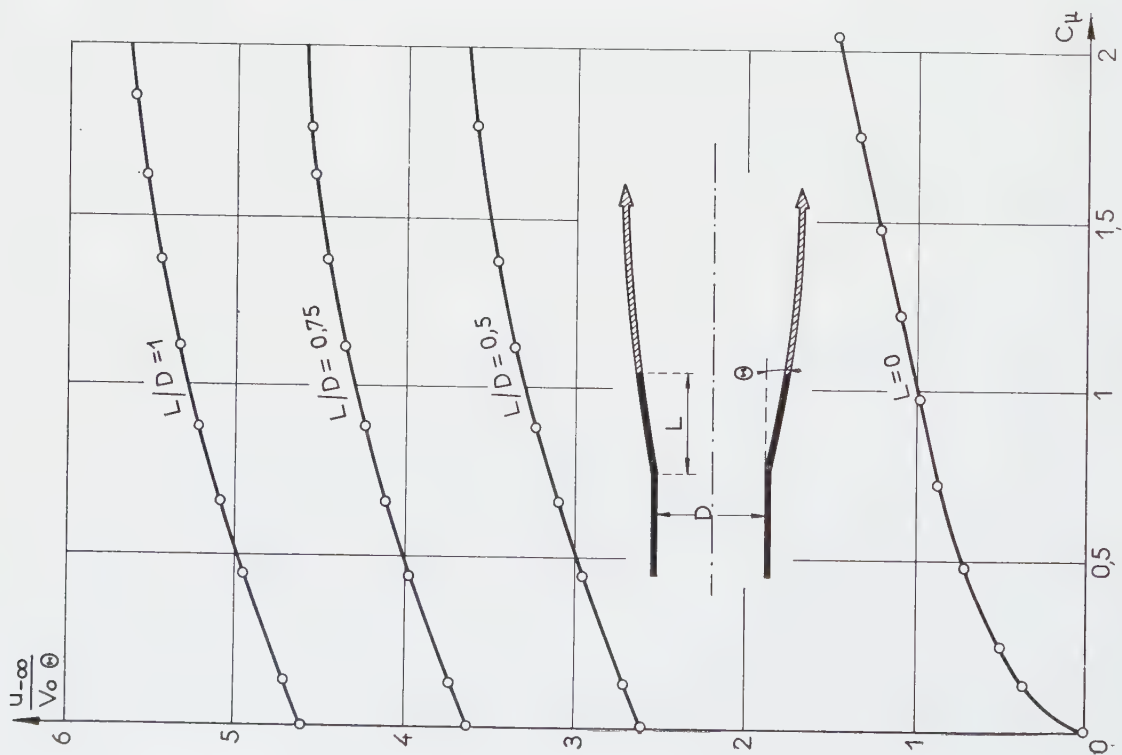


Fig. 10

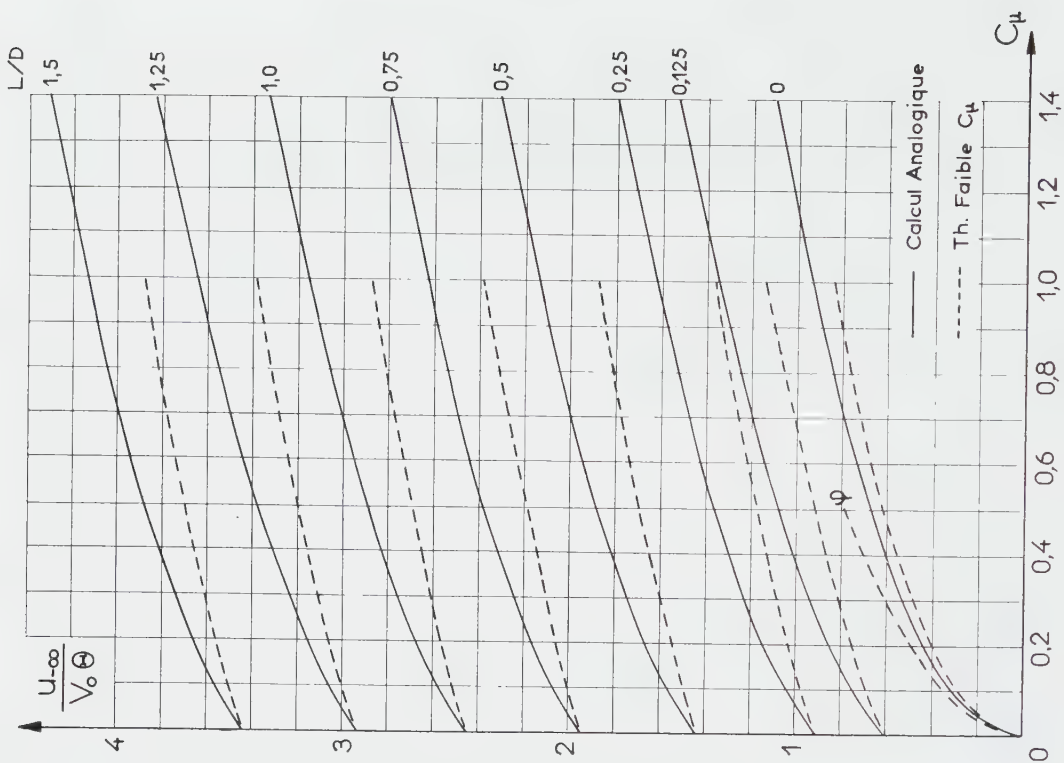


Fig. 11

ÉCOULEMENTS PLANS

4,1 Remarque sur la représentation analogique. Résultats.

Le principe développé dans l'étude des diffuseurs de révolution reste applicable à l'étude des écoulements bidimensionnels. Il faut toutefois noter que le coefficient C_μ , qui représente le rapport entre la quantité de mouvement débité par le soufflage et celle de l'écoulement principal, devient dans le cas bidimensionnel :

$$(10) \quad C_\mu = \frac{2 Q_j V_j}{\rho V_0^2 D}.$$

Ainsi, les conditions (3) et (4) deviennent :

$$(3') \quad u = \frac{C_\mu D}{2} u'_y$$

et :

$$(4') \quad \varphi = \frac{C_\mu D}{2} \varphi'_y + \bar{\varphi}.$$

Le modèle analogique est installé dans une cuve à fond plan. Le bord $x'x$ est une paroi isolante. Les électrodes dans la partie fj (ou Fj) sont alimentées à partir du potentiel zéro ou cent suivant qu'on représente le potentiel d'accélération u ou le potentiel des vitesses de perturbation φ à travers des résistances $r = \frac{C_\mu D}{2 \sigma \varepsilon h}$ pour assurer la condition (3') ou (4').

Les calculs analogiques ont donné des résultats représentés sur la figure 11, la variation de $\frac{u}{V_0^2}$ en fonction de C_μ pour des diffuseurs de $\frac{L}{D}$ différents.

4,2 Calcul approximatif pour les faibles C_μ .

Pour l'écoulement plan considéré, le calcul analytique est possible lorsque les C_μ sont faibles. Quand on remplace les résistances r nécessaires pour alimenter les électrodes dans la partie Fj par un décrochement FEN dont la hauteur FE est égale à $\frac{C_\mu D}{2}$, on est amené à déterminer la fonction harmonique u ou φ dans le domaine limité par $xx'MFEN$ du plan $z = x + iy$.

4,2 1 DIFFUSEUR AVEC SOUFFLAGE « RÉGULIER ».

Dans ce cas, nous déterminerons la fonction analytique $(u - iv)$ avec les conditions aux limites suivantes (fig. 12 a) :

- a) à l'infini amont ou aval, $u'_x = u'_y = 0$;
- b) sur $x'x$, MO, OF et FE, la dérivée normale de u est nulle;
- c) le point O est un point singulier où u tend vers l'infini, v est égal à zéro sur MO et à $-V_0 \Theta$ sur OF;
- d) sur EN, u est nul.

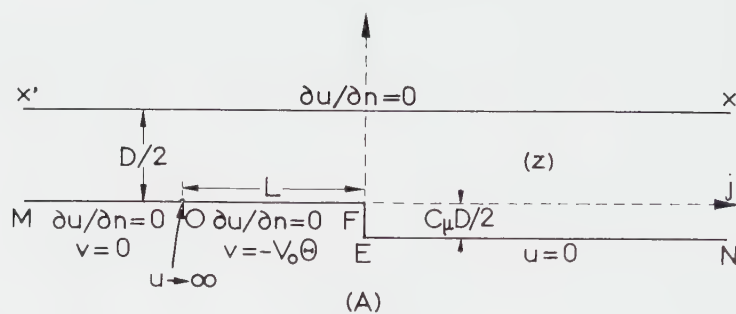


Fig. 12 a

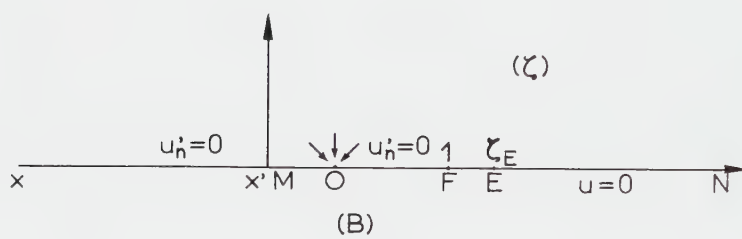


Fig. 12 b

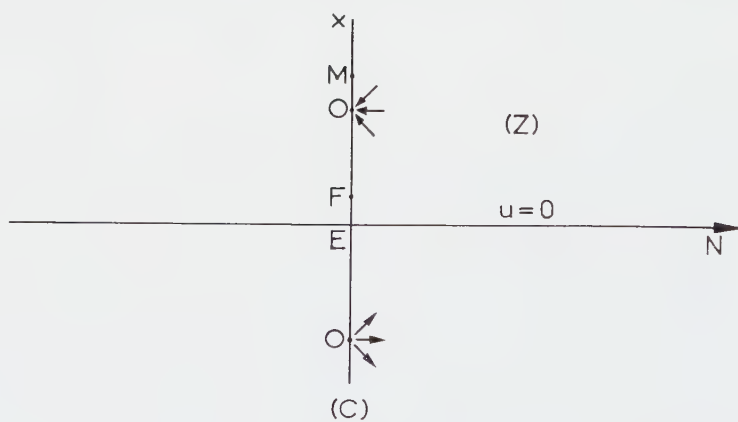


Fig. 12 c

La transformation de SCHWARZ [17] :

$$(11) \quad \frac{dz}{d\zeta} = K \frac{(\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta(\zeta - \zeta_E)^{1/2}}$$

fait passer le domaine limité par $xx'MFEN$ du plan z au demi-plan supérieur ζ . Les points x, x', M, F, E et N sont représentés par (*fig. 12 b*) :

$$(12) \quad \zeta_x = -\infty, \quad \zeta_{x'} = \zeta_M = 0, \quad \zeta_F = 1, \quad \zeta_E = (1 + C_\mu)^2, \quad \zeta_N = +\infty.$$

La position du point ζ_0 dépend à la fois du paramètre L/D et de la valeur C_μ , toutefois nous pouvons la fixer (C_μ étant petit par hypothèse) en supposant que $C_\mu = 0$, nous obtenons ainsi :

$$(12') \quad \zeta_0 = e^{-2\pi L/D}.$$

Ensuite, la transformation :

$$(13) \quad Z = \sqrt{\zeta - \zeta_E}$$

fait passer du demi-plan supérieur ζ au premier quadrant du plan Z . En respectant les conditions aux limites posées, la fonction $(u - iv)$ est définie dans le plan Z par (*fig. 12 c*) :

$$(14) \quad u - iv = -\frac{V_0 \Theta}{\pi} \log \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}$$

La valeur de u au point Z_M correspond à la valeur $u_{-\infty}$ en amont du diffuseur, compte tenu de (14), elle est donnée par :

$$(15) \quad \frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta} = -\frac{1}{\pi} \log \frac{1 + C_\mu - [(1 + C_\mu)^2 - e^{-2\pi L/D}]^{1/2}}{1 + C_\mu + [(1 + C_\mu)^2 - e^{-2\pi L/D}]^{1/2}}.$$

Cette formule donne le rapport $\frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ en fonction de C_μ pour les diffuseurs de $\frac{L}{D}$ différents; les résultats sont représentés par les courbes en pointillé de la *figure 11* en vue de comparaison avec les résultats du calcul analogique.

4.2.2 TUYÈRE DROITE AVEC SOUFFLAGE « SINGULIER »

En écrivant que $L = 0$, la formule (15) fournit le résultat pour ce cas particulier. On peut aussi envisager de déduire la variation de $\frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ en fonction de C_μ en partant du potentiel des vitesses de perturbation, pour cela il suffit de remarquer que l'écoulement considéré n'est qu'un cas particulier de l'écoulement étudié dans le chapitre premier : « La déviation d'un jet principal par un jet auxiliaire faiblement incliné », car, dans la *figure 1 a* de ce chapitre, si l'abscisse du point O' est rejetée à l'infini avec ($d = -\infty$) et si le jet de soufflage est dirigé vers le bas, on retrouve l'écoulement correspondant à une tuyère droite avec soufflage « singulier ». Le calcul pour faibles valeurs de C_μ , développé dans le chapitre mentionné, est donc utilisable,

et la formule (21) de ce chapitre peut fournir la variation de $\frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta}$ en fonction de C_μ si l'on prend $-\infty$ comme valeur de d , on a :

$$(16) \quad \frac{u_{-\infty}}{V_0 \Theta} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2 C_\mu}.$$

Le résultat que donne cette formule est représenté, sur la *figure 11*, par la courbe marquée φ . Sur cette figure, on peut remarquer que pour $L = 0$ les courbes calculées à partir des fonctions u et φ sont distinctes, cette divergence est due au remplacement du modèle analogique *exact* par un modèle *approximatif*; en effet, l'approximation porte principalement sur la condition aux limites à choisir pour le petit segment FE : pour schématiser le modèle analogique, on peut aussi bien admettre l'une des deux conditions suivantes : $u'_x = 0$ ou $\varphi'_x = 0$ suivant que l'on s'intéresse respectivement à la fonction u ou la fonction φ ; or, ces conditions ne sont évidemment pas équivalentes et il n'y a donc pas lieu de s'étonner de trouver des résultats différents suivant la condition adoptée, c'est ce que montre la comparaison des formules (15) et (16) et des courbes tracées en trait interrompu de la *figure 11*. Il est intéressant de remarquer que la courbe exacte donnée par le calcul analogique se situe entre les deux courbes des calculs approximatifs.

CHAPITRE III

EFFET D'UN JET MINCE AU BORD DE FUITE DU CARÉNAGE D'UNE HÉLICE CARÉNÉE, PROBLÈME D'ADAPTATION DE L'HÉLICE

1

INTRODUCTION

Une hélice est en général calculée et construite pour obtenir un rendement optimal à un régime imposé, ce régime fait intervenir le rapport des vitesses de rotation et de translation. Pour une vitesse de rotation fixée, l'hélice doit donc travailler dans une vitesse relative du vent bien déterminée, dite vitesse d'adaptation. La vitesse relative du fluide au droit de l'hélice change en même temps que la vitesse de vol; pour conserver le meilleur rendement de l'hélice à divers régimes de vol, on est souvent conduit à utiliser des hélices à pas variable. Dans le cas d'une hélice carénée, on peut encore, par un soufflage au bord de fuite du carénage, créer un volet fluide annulaire capable de provoquer un effet de striction ou d'évasement de la veine à la sortie de l'écoulement interne de façon à contrôler la vitesse du courant au droit de l'hélice, ceci afin de maintenir toujours celle-ci à la condition d'adaptation. Une étude théorique de l'hélice carénée avec soufflage au bord de fuite du carénage, basée sur une théorie linéaire [10], est développée dans la suite; on a pu ainsi mettre en évidence les facteurs qui jouent un rôle déterminant sur le fonctionnement d'un tel dispositif.

2

THÉORIE LINÉARISÉE

Dans cette étude, nous supposons que l'hélice, dans la condition d'adaptation, fonctionne à *circulation constante*; dans ce cas, l'écoulement aval formant le soufflé d'hélice est donc irrotationnel, en effet, les seuls tourbillons libres sont ceux qui s'échappent des extrémités des pales dont le nombre est supposé infini: ces tourbillons restent toujours sur la surface cylindrique constituant le prolongement du carénage. L'hélice impose au fluide traversant une augmentation de pression totale Δp_0 ; comme l'écoulement est encore irrotationnel en aval de l'hélice, le gradient de la pression totale est nul, donc l'augmentation de pression totale Δp_0 reste constante dans tout l'écoulement en aval de l'hélice. Dans le cadre de la théorie linéarisée des

faibles perturbations, la pression en amont de l'hélice et en dehors de son sillage est donnée par la formule de BERNOULLI linéarisée :

$$(1) \quad p - p_0 = -\varphi V_0 u,$$

où u est la composante axiale de la vitesse de perturbation et V_0 la vitesse de l'écoulement général. Dans la zone cylindrique en aval de l'hélice, le fluide subit une augmentation de la pression totale Δp_0 , la loi de BERNOULLI s'écrit donc :

$$(2) \quad \frac{p_0}{\varphi} + \frac{\Delta p_0}{\varphi} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{p}{\varphi} + \frac{V_0^2 + 2V_0 u + u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

où v et w désignent respectivement la composante radiale et la composante tangentielle de la vitesse de perturbation. Si l'hélice est très faiblement chargée, ou bien si elle est suivie d'un redresseur, ou bien encore, si le système propulsif est constitué par deux hélices contrarotatives, la vitesse tangentielle w est nulle ou très faible par rapport à V_0 ; d'après l'hypothèse des faibles perturbations la composante v est aussi supposée petite; ainsi la formule (2) peut être réduite à

$$(3) \quad p - p_0 = -\varphi V_0 u + \Delta p_0.$$

On supposera de plus que si le disque d'hélice ne se trouve pas trop près du bord d'attaque ni du bord de fuite du carénage, c'est-à-dire s'il est situé vers le milieu de celui-ci, la vitesse relative du fluide au droit de l'hélice est pratiquement uniforme et axiale et ne change pas de valeur au passage du plan de l'hélice, on a donc :

$$(4) \quad u_{\text{amont}} = u_{\text{aval}}$$

et, d'après (1) et (3), on trouve :

$$(5) \quad p_{\text{aval}} - p_{\text{amont}} = \Delta p_0.$$

Le fluide subit un saut de pression statique dans le plan de l'hélice (*fig. 13*).

En amont et en aval de l'hélice, le fluide étant irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ que l'on peut mettre sous la forme :

$$(6) \quad \Phi(x, y) = V_0 x + \varphi(x, y),$$

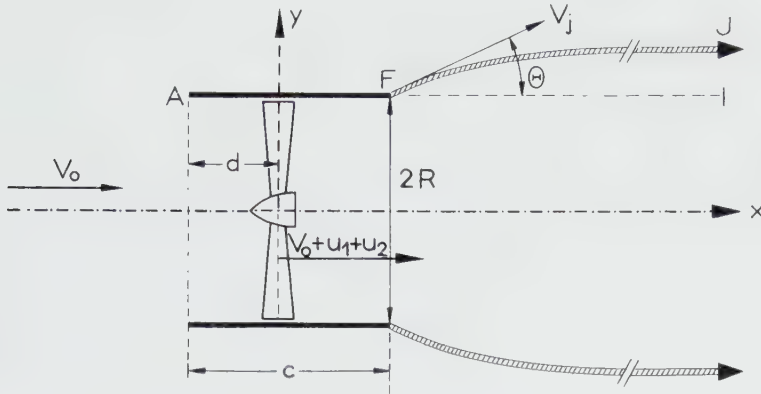
l'écoulement peut être défini par son potentiel des vitesses de perturbation $\varphi(x, y)$, fonction harmonique à symétrie axiale et régie par les conditions aux limites suivantes :

a) à travers le disque d'hélice MO, la vitesse $u = \varphi'_x$ est continue, comme la vitesse radiale est nulle $\varphi'_y = 0$, φ est constant sur le plan MO. Nous désignerons, dans la suite, par $\varphi = \varphi_I$ la valeur de cette constante sur la face amont MO, par $\varphi = \varphi_{II}$, sa valeur sur la face aval M'O', et par $\Delta\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I$ la discontinuité de φ correspondante;

b) si le carénage est constitué par le profil rectiligne parallèle à l'axe, Ox, la condition de glissement sur AF et AF' s'écrit $\varphi'_y = 0$;

c) considérons maintenant un jet mince issu du bord de fuite F, désignons respectivement par V_j , Θ et Q_j sa vitesse et sa direction à la sortie et son débit par unité de longueur de fente; sa condition d'équilibre écrite sur FI projection de FJ est :

$$(7) \quad p_+ - p_- = \frac{Q_j V_j}{R}.$$



Conditions aux limites

Sur AF, AM et M'F' : $\partial\psi/\partial n = 0$

Sur OM : $\psi = \psi_I$

Sur O'M' : $\psi = \psi_{II}$

Sur FI et F'I' :

$$\psi^+ - \psi^- = \frac{C_\mu R}{2} (\psi'_y - V_0 \Theta) + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} (x_F - x) + (\psi^+ - \psi^-)_F$$

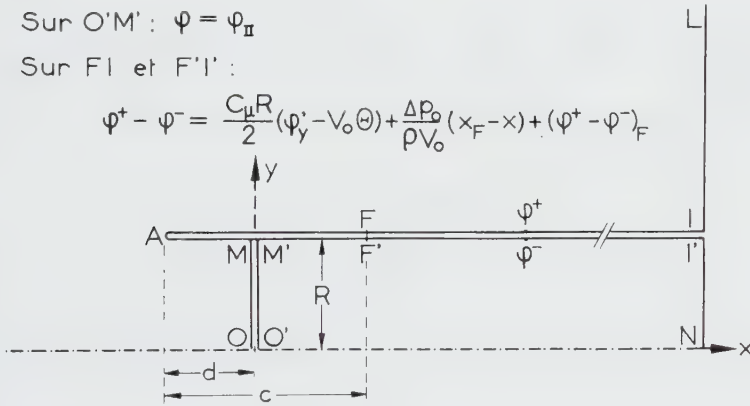


Fig. 13

où $p_+ - p_-$ désigne la différence de pression régnant aux bords de la nappe de jet et R désigne le rayon de courbure de celle-ci. Si R est grand et compte tenu de la condition de glissement du fluide sur la nappe de jet, on peut écrire : $\frac{1}{R} = -\frac{\varphi''_{xy}}{V_0}$.

En faisant intervenir les expressions (1) et (3) qui donnent la pression à l'extérieur et à l'intérieur du sillage de l'hélice, nous pouvons écrire la condition (7) sous la forme :

$$(8) \quad \rho V_0 (\varphi''_{x'} - \varphi''_{x'}) + \Delta p_0 = \frac{Q_j V_j}{V_0} \varphi''_{xy},$$

où φ^+ et φ^- sont les valeurs de φ au-dessus et au-dessous de la coupure IFAF'T'. En introduisant le coefficient de quantité de mouvement :

$$(9) \quad C_{\mu} = \frac{2 Q_j V_j}{\rho V_0^2 R}$$

et, en intégrant par rapport à x , nous obtenons :

$$(10) \quad \varphi^+ - \varphi^- + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} x = \frac{C_{\mu} R}{2} \varphi'_{xy} + C_{te}.$$

La constante d'intégration est déterminée en écrivant la condition (10) au bord de fuite F où $\varphi'_y = V_0 \Theta$, il vient :

$$(11) \quad C_{te} = (\varphi^+ - \varphi^-)_F + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} x_F - \frac{C_{\mu} R}{2} V_0 \Theta.$$

La condition (10) s'écrit finalement :

$$(12) \quad \varphi^+ - \varphi^- = \frac{C_{\mu} R}{2} (\varphi'_{xy} - V_0 \Theta) + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} (x_F - x) + (\varphi^+ - \varphi^-)_F.$$

d) à l'infini aval, dans le sillage de l'hélice (section IN) où $p = p_0$, on a :

$$(13) \quad (\varphi'_{xy})_{\infty} = u_{\infty} = \frac{\Delta p_0}{\rho V_0},$$

d'après (3), c'est la survitesse du fluide à l'infini aval dans le sillage de l'hélice; à l'infini, en dehors du sillage, on a $\varphi'_x = 0$, φ est donc constant sur le plan IL considéré comme l'infini.

Il peut être commode de décomposer φ en φ_1 et φ_2 tel que φ_1 et φ_2 remplissent les conditions suivantes sur FI :

$$(14) \quad \varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{C_{\mu} R}{2} (\varphi'_{1y} - V_0 \Theta) + (\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F$$

et :

$$(15) \quad \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \frac{C_{\mu} R}{2} \varphi'_{2y} + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} (x_F - x) + (\varphi_2^+ - \varphi_2^-)_F.$$

Ces deux fonctions doivent en plus satisfaire les conditions suivantes : leurs dérivées normales sont nulles sur AF, AM et M'F'; à travers OM, elles subissent un saut $\Delta \varphi_1$ et $\Delta \varphi_2$ respectivement; à l'infini et en dehors du sillage de l'hélice, leurs gradients sont nuls, elles sont donc considérées comme constantes sur le plan IL; dans le sillage de l'hélice (section I'N) on doit avoir : $(\varphi'_{1x}) = 0$ et $(\varphi'_{2x}) = u_{\infty} = \frac{\Delta p_0}{\rho V_0}$.

2,1 Interprétation physique des écoulements φ_1 et φ_2 .

2,1 1 SOUFLAGE SINGULIER, L'HÉLICE NE FONCTIONNE PAS : L'ÉCOULEMENT φ_1 .

La comparaison des conditions (14) et (12) montre que cet écoulement correspond à $\Delta p_0 = 0$, c'est-à-dire au cas simple d'une aile annulaire avec « soufflage

singulier » au bord de fuite tel que le jet se débouche suivant une direction. Soit $u_1 = \varphi'_{1x}$ la survitesse du fluide au droit de l'hélice, on vérifiera qu'elle est linéairement liée à $V_0 \Theta$ et que le rapport $\frac{u_1}{V_0 \Theta}$ est une fonction de C_μ que l'on désignera par :

$$(16) \quad F(C_\mu) = \frac{u_1}{V_0 \Theta}.$$

2,1 2 SOUFFLAGE RÉGULIER AVEC FONCTIONNEMENT DE L'HÉLICE : L'ÉCOULEMENT φ_2 .

La comparaison des conditions (15) et (12) montre que l'écoulement φ_2 correspond au cas où le jet débouche tangentiellement ($\Theta = 0$) en même temps que l'hélice fonctionne, elle apporte un accroissement de la pression totale Δp_0 au courant traversant. Soit $u_2 = \varphi'_{2x}$ la survitesse du fluide au droit de l'hélice, elle est linéairement liée à la survitesse u_∞ à l'infini aval dans le sillage de l'hélice, le rapport $\frac{u_2}{u_\infty}$ est une fonction de C_μ que l'on désignera par :

$$(17) \quad G(C_\mu) = \frac{u_2}{u_\infty} = \frac{u_2}{\frac{\Delta p_0}{\rho V_0}}.$$

2,2 Problème d'adaptation de l'hélice.

Supposons que pour une vitesse de vol V_0 , un angle de soufflage Θ et une intensité de soufflage définie par une certaine valeur de C_μ , l'hélice travaille dans la condition d'adaptation, elle apporte alors au courant traversant une augmentation de la pression totale Δp_0 bien déterminée. Dans ces conditions, la vitesse du courant au droit de l'hélice est égale à sa vitesse d'adaptation V_{ad} , que l'on peut écrire sous la forme :

$$(18) \quad V_{ad} = V_0 + u_1 + u_2 = V_0 + V_0 \Theta F(C_\mu) + u_\infty G(C_\mu).$$

Si la vitesse du vol V_0 change, on peut, sans modifier la vitesse de rotation, maintenir la vitesse d'adaptation au droit de l'hélice en agissant sur la valeur de Θ ou de C_μ ; pour établir l'asservissement de cette vitesse, il est nécessaire de connaître les fonctions $F(C_\mu)$ et $G(C_\mu)$.

3 RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ANALOGIES RHÉOÉLECTRIQUES

L'étude par analogies rhéométriques de l'influence d'une hélice à circulation constante, placée à l'intérieur d'une aile annulaire, a déjà été envisagée par G. HACQUES [3]; mais cet auteur s'est principalement intéressé à l'étude de la répartition des pressions sur l'aile annulaire non soufflée; nous considérons ici un autre aspect du problème, celui de l'action d'un soufflage sur le fonctionnement de l'hélice.

Le potentiel des vitesses de perturbation φ , fonction harmonique de révolution, est représenté par le potentiel électrique d'une cuve à fond incliné. La coupure AFI est matérialisée par une plaque en plexiglass, les parties AF et AF' sont isolantes

pour réaliser la condition $\varphi_y' = 0$, les parties FI et F'I' sont recouvertes de petites électrodes de hauteur mouillée h et de largeur ε en vis-à-vis. Le disque de l'hélice est figuré par une plaque portant les électrodes OM et O'M'. Enfin, les parties IL et I'N de la cuve sont recouvertes d'électrodes. Le modèle n'est pas alimenté d'une manière identique suivant qu'on représente φ_1 ou φ_2 .

3,1 Représentation du potentiel φ_1 .

La figure 14 représente le montage électrique. L'électrode OM est reliée à la borne 100 de l'alimentation et l'électrode O'M' est reliée à la borne zéro à travers une résistance r_1 . Les électrodes en vis-à-vis de FI et F'I' sont reliées par paire à travers des résistances r . Convenons que le sens du courant électrique est le même que le sens du gradient du potentiel, le courant débité par l'électrode O'M' arrive et entre

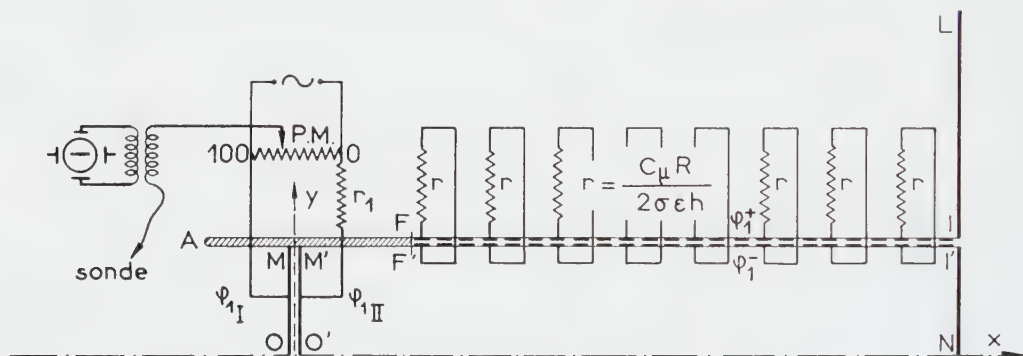


Fig. 14

dans les électrodes de F'I', puis ayant traversé les résistances r , il sort des électrodes de FI et poursuit sa course vers l'électrode OM. A l'infini, l'intensité du courant tend vers zéro conformément à ce qu'on exige : $\text{grad } \varphi = 0$, les électrodes IL et I'N ne sont pas alimentées. Sur les parties FI et F'I', on doit vérifier la condition (14) écrite en potentiel électrique :

$$(19) \quad \varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{C_\mu R}{2} \cdot \frac{1}{\sigma \varepsilon h} \cdot \frac{\varphi_1^+ - \varphi_1^-}{r} - \frac{C_\mu R}{2} V_0 \Theta + (\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F$$

et l'on prend :

$$(20) \quad r = \frac{C_\mu R}{2 \sigma \varepsilon h}$$

et fixe l'angle de soufflage Θ par :

$$(21) \quad V_0 \Theta = 2 \frac{(\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F}{C_\mu R}$$

la condition (19) sera satisfaite automatiquement.

La mesure de $(\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F$ au bord de fuite nous permet de déduire la valeur

de $V_0\Theta$ par l'expression (21); la mesure du potentiel de l'électrode O'M' permet de calculer la survitesse $u_1 = \varphi'_{1w}$ au plan de l'hélice, soit :

$$(22) \quad u_1 = \frac{2}{\sigma R h} \cdot \frac{\varphi_{1w}}{r},$$

où $Rh/2$ représente l'aire mouillée de l'électrode O'M'. La fonction $F(C_\mu)$ se déduit de :

$$(23) \quad F(C_\mu) = \frac{u_1}{V_0\Theta} = \frac{C_\mu}{r_1 \sigma h} \frac{\varphi_{1w}}{(\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F}.$$

3,2 Représentation du potentiel φ_2 .

La figure 15 représente le montage électrique. Chaque paire d'électrodes en vis-à-vis sur FI et F'I' est alimentée par un transformateur à travers une résistance r . Si l'on écrit la condition (15) en potentiel électrique, on a :

$$(24) \quad \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \frac{C_\mu R}{2} \frac{1}{\sigma \varepsilon h} \frac{\varphi_2^+ - \varphi_2^-}{r} + \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} (x_F - x) + (\varphi_2^+ - \varphi_2^-)_F.$$

En jouant sur la discontinuité de φ_2 à travers OM, il est possible d'imposer $(\varphi_2^+ - \varphi_2^-)_F = 0$; on prend $r = \frac{C_\mu R}{2 \sigma \varepsilon h}$, et choisit :

$$(25) \quad \varphi_2^- - \varphi_2^+ = \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} (x - x_F),$$

la condition (24) sera vérifiée automatiquement. Nous voyons que la différence de potentiel alimentant les électrodes en FI et F'I' est fonction linéaire de $x - x_F$, la pente de cette fonction est égale à $\frac{\Delta p_0}{\rho V_0}$ qui n'est autre que la survitesse du courant dans le sillage de l'hélice à l'infini aval, et on peut l'imposer arbitrairement à :

$$(26) \quad \frac{\Delta p_0}{\rho V_0} = u_\infty = \frac{100}{x_1 - x_F}$$

pour alimenter la cuve. Compte tenu de ceci, l'équation (25) s'écrit :

$$(27) \quad \varphi_2^- - \varphi_2^+ = 100 \frac{x - x_F}{x_1 - x_F}.$$

A l'aide des potentiomètres P et d'un pont de mesure alimenté par transformateur on peut réaliser cette différence de potentiel pour chaque paire d'électrodes considérée.

Aux points I et I' ($x = x_1$), nous avons $\varphi_2^- - \varphi_2^+ = 100$ d'après (27), ces points étant considérés comme situés à l'infini aval où $\varphi'_{2y} = 0$, on peut remplacer φ_2^+ par φ_2^+ et écrire $\varphi_2^- - \varphi_2^+ = 100$, donc les électrodes IL et I'N seront portées respectivement aux potentiels zéro et cent.

Au bord de fuite $F(x = x_F)$, on a $(\varphi_2^- - \varphi_2^+)_F = 0$ d'après (25) ou (27), si la condition $(\varphi_2^+ - \varphi_2^-)_F = 0$ est vérifiée, on aura $\varphi_{2F}^+ = \varphi_{2F}^-$ et par conséquent

$(\varphi'_{2y})_F = 0$ qui exprime justement la condition du soufflage tangentiel. Les électrodes OM et O'M' sont alimentées par un transformateur à travers une résistance r_1 ; un potentiomètre P_1 nous permet de faire varier la différence $\varphi_{2II} - \varphi_{2I}$ des potentiels d'alimentation. Pour régler les conditions au bord de fuite F, on peut, en plaçant deux sondes respectivement aux points F et F' avec un indicateur de zéro (*fig. 16 a*), régler la différence $\varphi_{2II} - \varphi_{2I}$ à l'aide de P_1 jusqu'à ce que $(\varphi_2^+ - \varphi_2^-)_F = 0$ soit observé. On peut aussi placer une sonde devant l'électrode, tout près du point F (*fig. 16 b*), et brancher un indicateur de zéro entre la sonde et cette électrode, puis régler $\varphi_{2II} - \varphi_{2I}$ jusqu'à ce que l'équilibre de l'indicateur soit constatée, on aura $(\varphi'_{2y})_F = 0$ au point F ou F'. D'ailleurs, on constate que ces deux méthodes de réglage conduisent au même résultat.

La mesure de la différence de potentiels $\varphi_{2II} - \bar{\varphi}_{2II}$ permet de déduire la survitesse du courant au droit de l'hélice :

$$(28) \quad u_2 = \varphi'_{2x} = \frac{2}{\sigma R h} \frac{\varphi_{2II} - \bar{\varphi}_{2II}}{r_1}.$$

Compte tenu des relations (26) et (28), la fonction $G(C_\mu)$ sera donnée par :

$$(29) \quad G(C_\mu) = \frac{u_2}{u_\infty} = \frac{2}{\sigma R h} \frac{\varphi_{2II} - \bar{\varphi}_{2II}}{r_1} \frac{x_I - x_F}{100}.$$

REMARQUE. — Lorsqu'on pose la maquette de façon à ce que la région extérieure du carénage et la région correspondante au sillage de l'hélice soient représentées côte à côte dans la même cuve comme le montre la *figure 15*, on constate qu'il y a une fuite de courant électrique par l'effet de capacité dans la représentation du potentiel φ_2 , en effet, les électrodes IL et I'N, ainsi que les électrodes se trouvant près d'elles sur FI et F'I', sont portées à une différence de potentiel très grande, le bord ainsi que le fond de la cuve étant en matières isolantes mais diélectriques deviennent l'armature de condensateur constitué par les électrodes précédentes; une partie du courant alternatif débité par ces électrodes, au lieu de contourner la coupure IAI', passe directement de I à I' par effet capacitif. Pour éviter cet effet parasite, nous avons été obligés de représenter la région correspondant au sillage de l'hélice M'O'NI' par une maquette installée séparément dans une autre cuve inclinée.

4

RÉSULTATS DU CALCUL ANALOGIQUE

Le calcul analogique a été effectué sur une hélice carénée dont le rapport entre la longueur du carénage et son diamètre $\frac{c}{2R}$ était égal à l'unité; l'hélice était supposée située au milieu du carénage.

Les représentations du potentiel φ_1 ont permis d'évaluer la fonction $F(C_\mu)$ dont la variation est représentée sur la *figure 17*. La dérivation graphique du potentiel φ_1 , mesuré le long du profil du carénage, fournit la survitesse u_1 du courant sur le profil, la *figure 18* représente la répartition de $\frac{u_1}{V_0 \Theta}$ sur l'extrados et l'intrados pour diverses valeurs de C_μ .

Si $y(x)$ désigne la forme de la ligne de jet, sur FI on aura la relation :

$$(30) \quad \frac{y'_x}{\Theta} = \frac{\varphi'_{1Y}}{V_0 \Theta} = \frac{(\varphi_1^+ - \varphi_1^-)}{(\varphi_1^+ - \varphi_1^-)_F}.$$

Les formes de lignes de jet, obtenues par intégration graphique des valeurs de y'_x fournies par (30), sont représentées *figure 19*.

Pour le soufflage tangential, le calcul analogue de φ_2 a montré que dans le

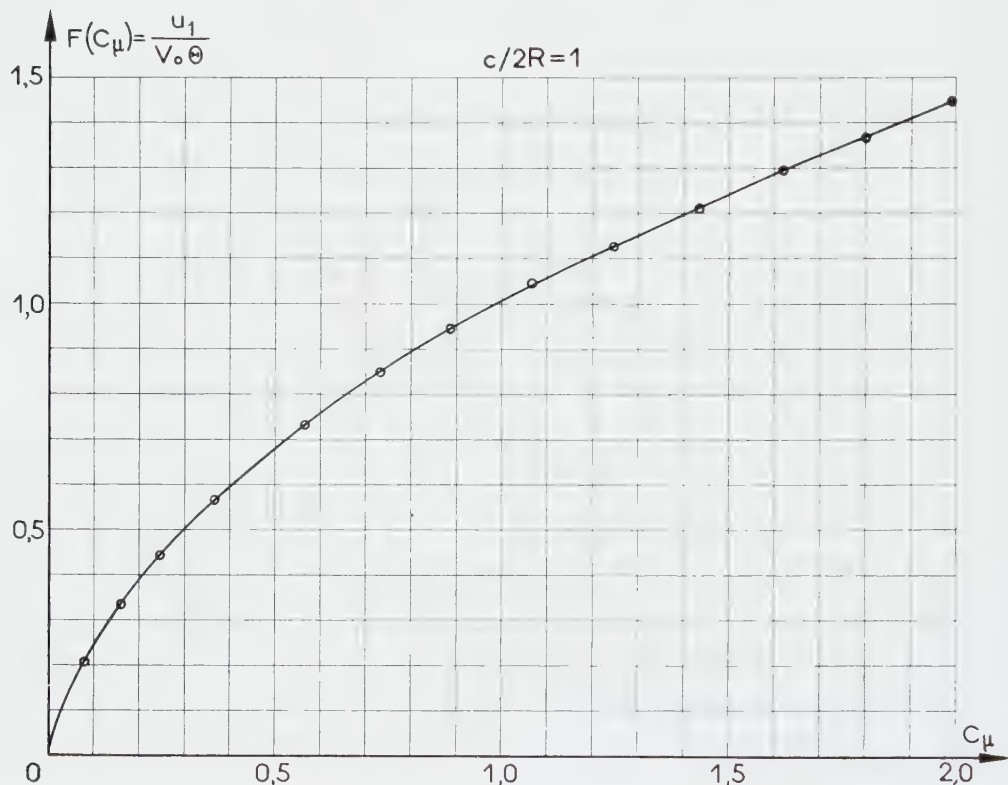
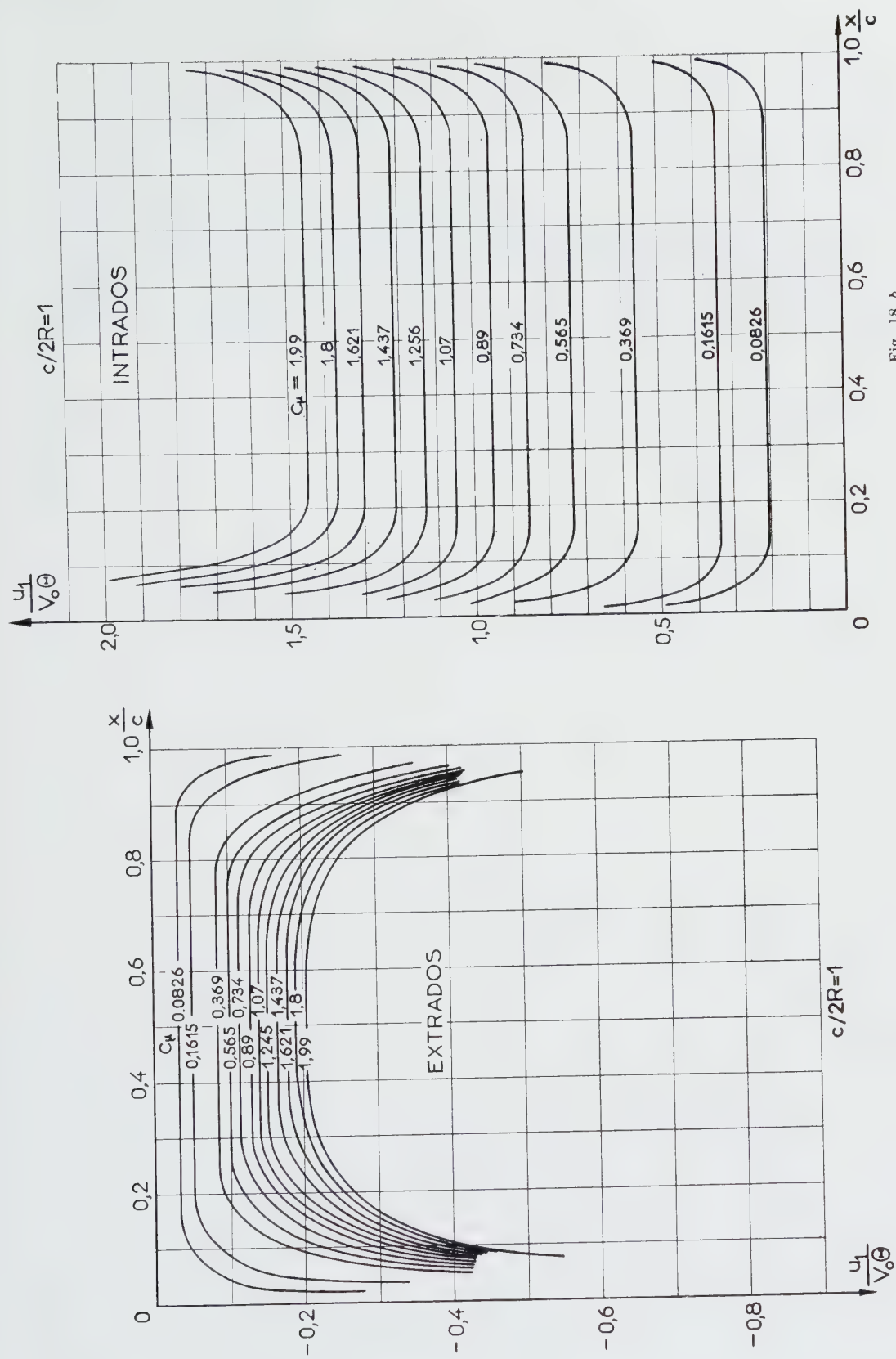


Fig. 17

cas de cette aile annulaire $\left(\frac{c}{2R} = 1\right)$, le soufflage n'apportait aucun effet décelable sur l'écoulement : la ligne de jet demeure pratiquement rectiligne dans le prolongement du profil pour n'importe quelle valeur de C_μ ; la fonction $G(C_\mu)$, qui représente le rapport entre les survitesses du courant au droit de l'hélice et à l'infini aval dans son sillage, est égale à l'unité, exactement comme pour un carénage indéfini. La *figure 20* représente la répartition de la survitesse u_2 rapportée à $u_\infty = \frac{\Delta p_0}{\rho V_0}$, sur l'extrados et l'intrados du profil du carénage; on a une courbe unique pour toutes les valeurs de C_μ .



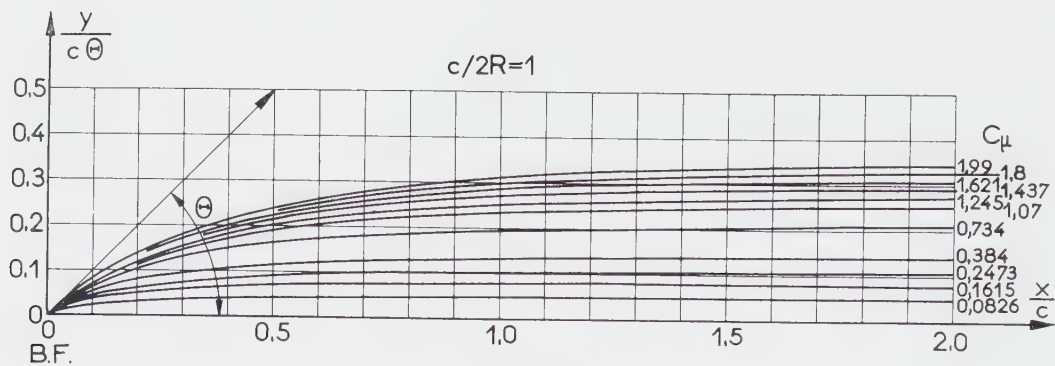


Fig. 19

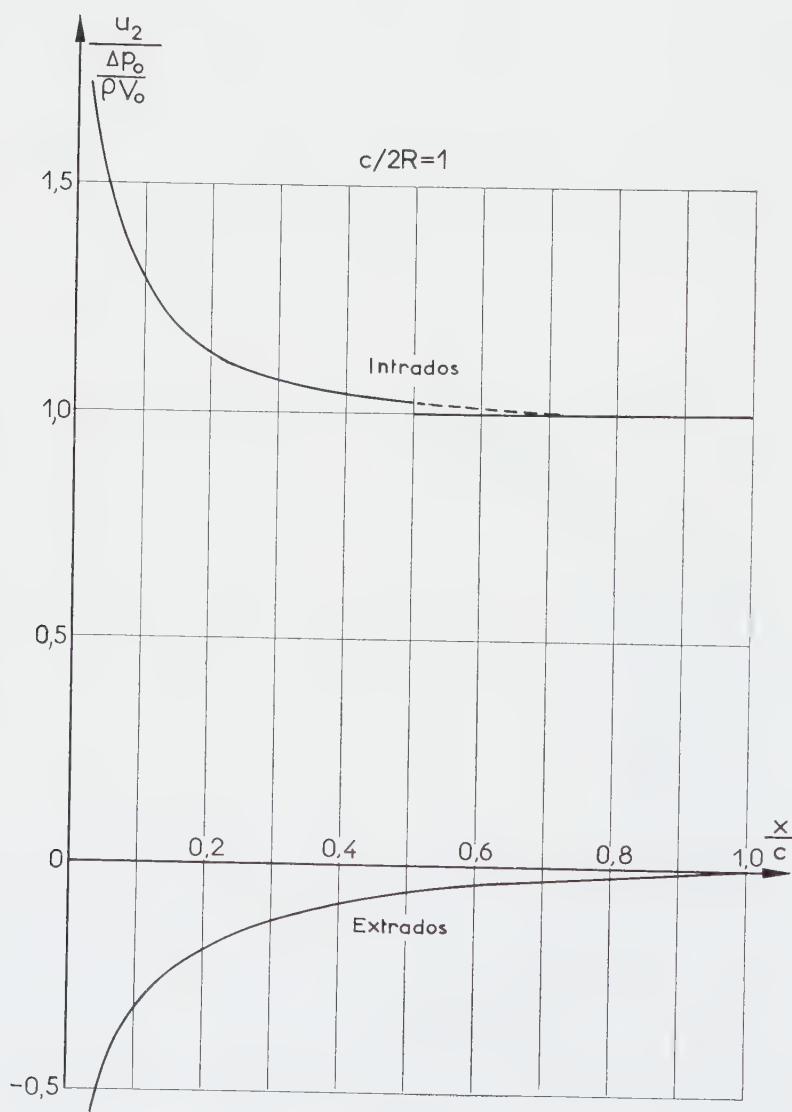


Fig. 20

Pour le cas général de l'hélice en fonctionnement avec soufflage singulier, la pente y'_x de la ligne de jet est donnée par :

$$(31) \quad y'_x = \frac{\varphi'_{1y} + \varphi'_{2y}}{V_0},$$

comme φ'_{2y} est toujours nul, le potentiel φ_2 ne donne aucune contribution sur la forme des lignes de jet; la figure représente aussi la forme des jets pour le cas général.

5

POUSSÉE TOTALE DU SYSTÈME PROPULSIF

En se basant sur la théorie des quantités de mouvement de l'hélice introduite par RANKINE et FROUDE [2], il est facile de vérifier que la poussée globale du système hélice-carénée avec soufflage est donnée par :

$$(32) \quad P = \pi R^2 \varphi V_{out} u_\infty + 2 \pi R Q_j V_j,$$

cette formule tient compte de la force de succion exercée au bord d'attaque du carénage par la dépression de l'écoulement; elle reste valable en dehors du cadre de la théorie linéaire. On remarquera que la quantité de mouvement du jet sortant sous n'importe quelle direction est transformée entièrement en poussée, comme dans le cas d'une aile d'allongement infini avec soufflage au bord de fuite.

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE GRILLE D'AUBE AVEC SOUFFLAGE AU BORD DE FUITE DES PROFILS

1

INTRODUCTION

Dans les compresseurs axiaux qui équipent les turboréacteurs modernes, le calage des aubes dans les étages de tête du stator est souvent réglable et soumis à des asservissements en vue d'améliorer la souplesse de fonctionnement du système. On peut, évidemment, envisager d'atteindre les mêmes effets aérodynamiques à partir de la technique récente du soufflage : le soufflage au bord de fuite des profils d'une grille permet, en effet, suivant la direction et l'intensité des jets auxiliaires, de contrôler la déflexion de l'écoulement traversant. En outre, ce soufflage peut avoir encore un autre intérêt qu'il est bon de signaler : il permet un contrôle de la couche limite et, de ce fait, il peut être employé pour retarder son décollement à l'extrados des profils lorsque l'incidence de l'écoulement amont est augmentée. L'étude théorique que nous présentons ici est basée sur la théorie linéaire de faibles perturbations [9], elle permet néanmoins d'obtenir des prévisions qui, une fois extrapolées, sont très proches des résultats expérimentaux.

2

THÉORIE

Considérons une grille indéfinie de profils minces dans le plan xOy , et désignons par β l'angle de calage, par l la longueur de la corde et par a l'entreplan des profils (*fig. 21*). L'écoulement autour de cette grille possède une vitesse uniforme $V_{-\infty}$ à l'infini amont, l'angle incident est égal à α . L'écoulement est dévié par des jets auxiliaires de débit Q_j pour chaque profil sortant du bord de fuite sous une inclinaison Θ et avec une vitesse d'éjection V_j ; à l'infini aval il retrouve une vitesse uniforme $V_{+\infty}$ avec un angle de déflexion θ . Les angles α , Θ et θ sont supposés petits et comptés à partir de la direction de la corde des profils suivant le sens trigonométrique. Deux systèmes d'axes orthogonaux sont utilisés dans la suite : dans le système x_1Oy_1 , l'axe Oy_1 est parallèle au front de la grille, et dans le système xOy , l'axe Ox est parallèle à la direction de la corde des profils. Si l'on décompose les vitesses de l'écoulement à l'infini amont et à l'infini aval en une composante suivant Ox et

une autre suivant Oy_1 , on voit qu'elles ont une composante identique suivant l'axe Ox que l'on désignera par V_0 , c'est autour de l'écoulement uniforme de vitesse V_0 que la linéarisation sera faite.

L'écoulement est défini par son potentiel des vitesses de perturbation φ ; la périodicité du champ des vitesses permet de limiter la détermination de la fonction

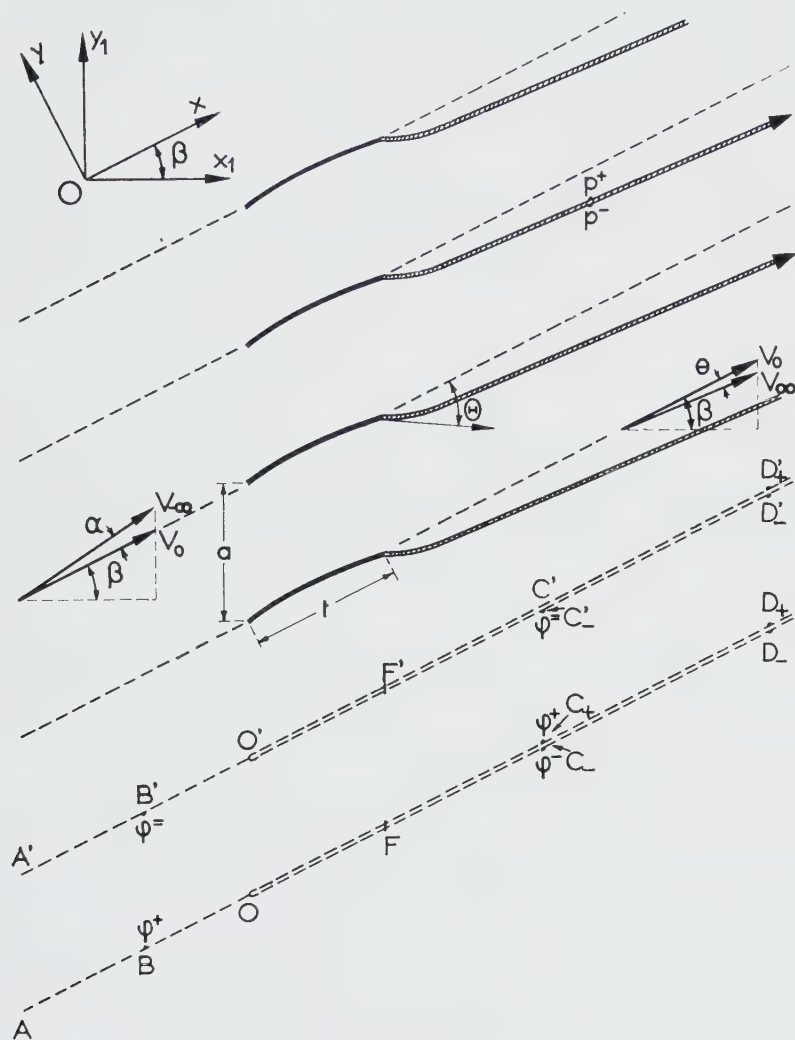


Fig. 21

à une bande, dont la largeur comptée parallèlement à Oy_1 , est égale à l'intervalle a , soit la bande limitée par AD et $A'D'$; les conditions aux limites sont alors les suivantes :

a) à l'infini amont et à l'infini aval, en écrivant la condition de la conservation du débit, on montre que :

$$(1) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{-\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{+\infty} = 0.$$

Il reste :

$$(2) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_{x=0} = \frac{V_0 \alpha}{\cos \beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_{x=a} = \frac{V_0 \theta}{\cos \beta} ;$$

b) en amont des profils, en désignant par φ^+ et φ^- les valeurs de φ aux points B et B' situés en vis-à-vis et distante de a , la circulation due à la vitesse de perturbation suivant le chemin BAA'B' est égale à la différence $\varphi^+ - \varphi^-$, compte tenu de la périodicité et la relation (2), on obtient :

$$(3) \quad \varphi^+ - \varphi^- = \frac{a V_0 \alpha}{\cos \beta} ;$$

c) si le profil mince est défini par $y = x$ dans le système d'axes xOy , la condition de glissement du fluide sur le profil s'écrit $\varphi'_y = V_0 \theta$;

d) sur FD, la projection de la ligne de jet, on écrit la condition d'équilibre du jet :

$$(4) \quad -\rho V_0 (\varphi'_{x^+} - \varphi'_{x^-}) = \frac{Q_f V_f}{V} \varphi'_{y^+},$$

en désignant par φ^+ et φ^- les valeurs de φ au-dessus et au-dessous de la coupure OFD. En intégrant et en introduisant un coefficient pour caractériser l'intensité du soufflage $C_x = Q_f V_f / \rho V_0^2 a \cos \beta$ qui est le rapport entre la quantité de mouvement de chaque jet et celle de l'écoulement général débitant dans un canal de la grille, on obtient :

$$(5) \quad \varphi^+ - \varphi^- = C_x a \cos \beta \varphi'_{y^+} + K.$$

La constante K est déterminée par la condition à l'infini aval où on a $(\varphi'_{y^+})_{x=a} = V_0 \theta$ et $(\varphi^+ - \varphi^-)_{x=a} = a V_0 (\alpha - \theta) \cos \beta$ qui résulte de la circulation suivant le trajet D-AA'D'-D-; on a :

$$(6) \quad K = C_x a \cos \beta V_0 \theta + \frac{a V_0}{\cos \beta} (\alpha - \theta).$$

Soient C et C' deux points en vis-à-vis sur la ligne FD et sur la ligne F'D' respectivement, désignons par φ^- la valeur de φ au-dessous de la coupure O'F'D' au point C', la circulation suivant le trajet C-AA'C- est égale à la différence $\varphi^+ - \varphi^-$, on en déduit :

$$(7) \quad \varphi^+ = \varphi^- + \frac{a V_0 \alpha}{\cos \beta}.$$

Compte tenu de (6) et (7), la condition (5) s'écrit :

$$(8) \quad \varphi^+ - \varphi^- = C_x a \cos \beta \varphi'_{y^+} - a V_0 \theta \left(C_x \cos \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right).$$

C'est une condition du type de FOURIER faisant intervenir la différence $\varphi^+ - \varphi^-$, au lieu de φ^- simplement :

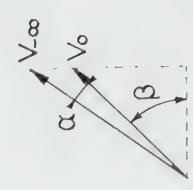
e) dans chaque section telle que BB' ou CC', la condition de la conservation du débit de l'écoulement général exige que le flux traversant une telle section de



Fig. 23
SOUFFLAGE RÉGULIER
L'angle de soufflage θ est nul



Fig. 22
SOUFFLAGE SINGULIER
Écoulement à l'infini amont parallèle aux cordes des profils ($\alpha = 0$)



l'écoulement de perturbation est nul, soit $\psi_B = \psi_{B'}$ (ou $\psi_C = \psi_{C'}$) en désignant par ψ la fonction de courant de l'écoulement de perturbation.

Pour traiter l'écoulement autour d'une grille de profils cambrés dont la forme est définie par $y(x)$, il est commode dans ce cas général de décomposer φ en trois parties en écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

1° φ_1 correspond à un écoulement autour d'une grille de profils plans qui a le même calage β et le même entreplan relatif $\frac{a}{l}$ que la grille de profils cambrés considérée, l'angle incident à l'infini amont est nul ($\alpha_1 = 0$), le soufflage est « singulier », le jet est émis dans la direction Θ_1 avec Ox , la déflexion de l'écoulement à l'infini aval est égale à θ_1 le rapport $\frac{\theta_1}{\Theta_1}$ est une fonction de C_μ , et on désigne cette fonction par $F(C_\mu) = \frac{\theta_1}{\Theta_1}$ (fig. 22);

2° φ_2 correspond à un écoulement autour de la grille de profils plans avec un angle incident $\alpha_2 = \alpha$ à l'amont, le soufflage est « régulier », le jet est émis suivant le prolongement du profil plan : $\Theta_2 = 0$, en désignant par θ_2 la déflexion de l'écoulement à l'infini aval, le rapport $\frac{\theta_2}{\alpha}$ est une fonction de C_μ que l'on désigne par $G(C_\mu)$ (fig. 23);

3° φ_3 correspond à un écoulement autour de la grille de profils cambrés avec un angle incident nul à l'amont ($\alpha_3 = 0$), le soufflage est « régulier », le jet est émis suivant le prolongement du profil $\Theta_3 = \frac{(y'_x)_F}{V_0}$, la déflexion à l'infini θ_3 est une fonction de C_μ (fig. 24).

La somme de φ_1 , φ_2 et φ_3 reconstitue le potentiel φ qui correspond à un écoulement autour de la grille de profils cambrés avec un angle d'attaque α à l'amont, le jet émis suivant la direction $\Theta = \Theta_1 + \left(\frac{(y'_x)_F}{V_0} \right)$ et l'angle de déflexion à l'aval sera déduit par la relation :

$$(9) \quad \theta = \left(\Theta - \frac{(y'_x)_F}{V_0} \right) F(C_\mu) + \alpha G(C_\mu) + \theta_3(C_\mu).$$

Comme φ_1 , φ_2 et φ_3 ne sont qu'un cas particulier de φ , les conditions aux limites qui les déterminent sont déduites immédiatement des considérations précédentes et on a :

a') à l'infini amont et à l'infini aval, leurs dérivées partielles suivant Ox_1 sont nulles;

b') en amont des profils, aux points B et B' par exemple, on a :

$$\varphi_1 - \varphi_1' = 0,$$

$$\varphi_2 - \varphi_2' = \frac{a V_0 \alpha}{\cos \beta},$$

$$\varphi_3 - \varphi_3' = 0;$$

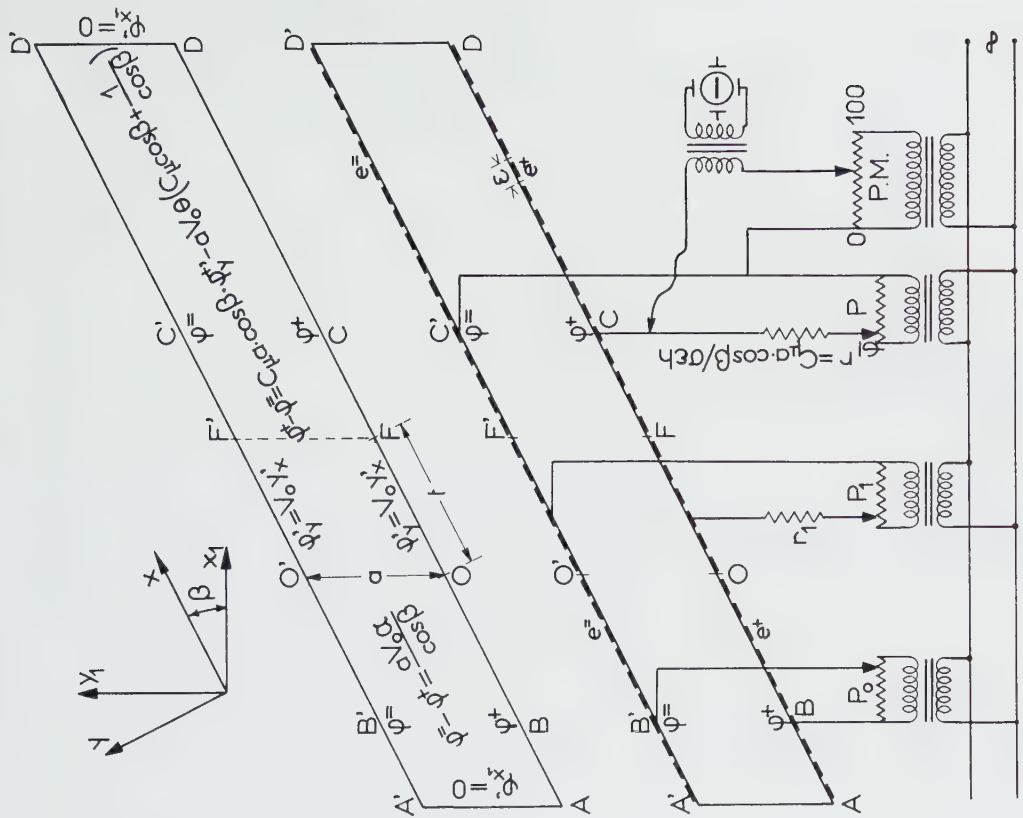


Fig. 25

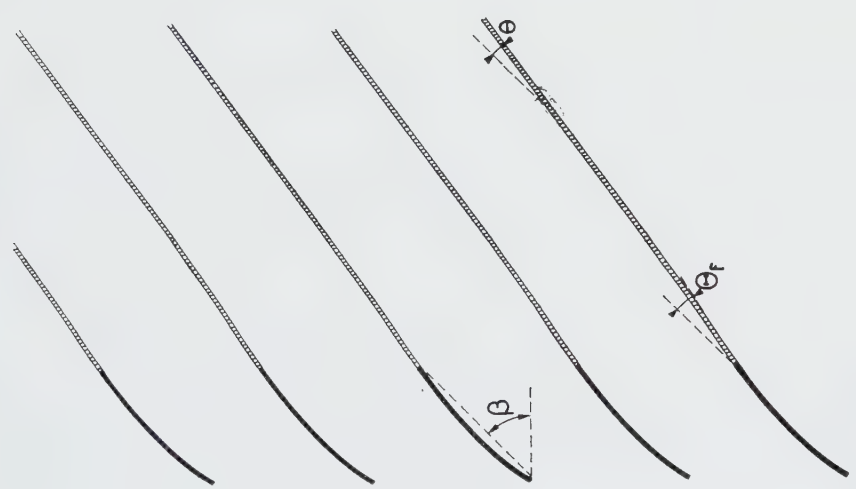
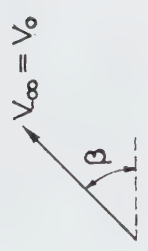


Fig. 24



c') sur la projection du profil OF et O'F', on a :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = V_0 y'_x$$

et, en particulier, au bord de fuite F ou F', on a :

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_F = V_0 \Theta_1.$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_F = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right)_F = V_0 (y'_x)_F.$$

Enfin, les conditions d) et e) sont applicables sans modification particulière à signaler.

3 PRINCIPE DE RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE ANALOGIQUE

Le montage du calcul analogique rhéoelectrique est représenté sur la *figure 25*. Le potentiel φ est identifié au potentiel électrique d'une cuve à fond plan, en forme d'un parallélogramme, représentant le domaine AA'D'D. Les frontières AA' et DD' considérées respectivement comme infini amont et infini aval sont isolantes d'après a). Les bords AD et A'D' sont recouverts de petites électrodes e^+ et e^- en vis-à-vis, chaque paire d'électrodes e^+ et e^- est alimentée par un transformateur de façon à assurer la condition e). En amont des profils, sur les parties AO et A'O', la différence de potentiel $\varphi^- - \varphi^+$ qui alimente chaque paire d'électrodes e^- et e^+ est fixée à $\frac{a V_0 \alpha}{\cos \beta}$ d'après b). Dans le cas particulier où l'écoulement à l'infini amont est à l'incidence nulle ($\alpha = 0$), on a $\varphi^- = \varphi^+$; les électrodes e^+ et e^- seront reliées paire par paire. Dans les parties OF et O'F' qui schématisent l'extrados et l'intrados du profil, il faut envoyer une intensité de courant $I = \sigma \varepsilon h V_0 y'_x$ à travers des électrodes e^+ et e^- d'après c) où εh représente la surface mouillée de l'électrode. Mais si la grille considérée est constituée par des profils *plans* : $y'_x = 0$ les parties OF et O'F' deviennent isolantes. Sur les parties FD et F'D' qui schématisent les lignes de jet, chaque paire d'électrodes est alimentée à partir d'une différence de potentiel $\bar{\varphi}^- - \bar{\varphi}^+$ à travers une résistance r . En remplaçant φ^+ par $\frac{(\varphi^- - \bar{\varphi}^+)}{\sigma \varepsilon h r}$, la condition (8) s'écrit :

$$(10) \quad \varphi^+ - \varphi^- = C_\mu a \cos \beta \frac{\varphi^+ - \bar{\varphi}^+}{\sigma \varepsilon h r} - a V_0 \theta \left(C_\mu \cos \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right).$$

En fixant la valeur des résistances r par :

$$(11) \quad r = \frac{C_{\mu} a \cos \beta}{\sigma \varepsilon h}$$

et en prenant :

$$(12) \quad \bar{\varphi} - \varphi^{\infty} = -a V_0 \theta \left(C_{\mu} \cos \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right),$$

la condition (10) sera satisfaite automatiquement. Compte tenu de (12), la condition (8) s'écrit :

$$(13) \quad \varphi^+ - \varphi^- = C_{\mu} a \cos \beta \varphi_y^{+'} + \bar{\varphi} - \varphi^{\infty}.$$

En écrivant cette condition soit au point F où $(\varphi_y^{+'})_F = V_0 \theta$ soit à l'infini aval où $(\varphi_y^{+'})_{\infty} = V_0 \theta$, on déduit l'angle de soufflage θ et l'angle de déviation β , soient :

$$(14) \quad V_0 \theta = \frac{(\varphi^+ - \bar{\varphi})_F}{C_{\mu} a \cos \beta} \quad \text{et} \quad V_0 \theta = \frac{(\varphi^+ - \bar{\varphi})_{\infty}}{C_{\mu} a \cos \beta}.$$

Lorsque la valeur des résistances est bien déterminée, on peut, après avoir mesuré la résistivité $\frac{1}{\sigma}$, ajuster la hauteur h pour avoir une valeur de C_{μ} voulue, calculée d'après (11). Si l'égalité (11) est bien satisfaite les valeurs de θ calculées à partir de (12) et (14) sont identiques. En éliminant $V_0 \theta$ entre ces deux relations, on obtient :

$$(15) \quad \frac{(\varphi^+ - \bar{\varphi})_{\infty}}{(\varphi^+ - \bar{\varphi})_F} = 1 + \frac{1}{C_{\mu} \cos^2 \beta}.$$

Cette égalité ne peut évidemment se vérifier que si la relation (11) est rigoureusement satisfaite, cette remarque peut servir de critère pour le réglage de la hauteur d'eau h de la cuve.

4 GRILLE DE PROFILS PLANS, $\beta = 45^\circ$, $a/l = 1$

Comme exemple d'application de la méthode rhéoelectrique, nous avons traité l'écoulement autour d'une grille de profils plans avec calage $\beta = 45^\circ$ et entreplan relatif $\frac{a}{l} = 1$. Le potentiel φ est égal à la somme de φ_1 et φ_2 définis auparavant.

4.1 Représentation de φ_1 .

Dans cet exemple, les parties OF et O'F', qui représentent le profil, sont isolantes. En amont des profils sur les parties AO et A'O', les électrodes e^+ et e^- en vis-à-vis sont reliées par paire. Dans les parties FD et F'D', chaque paire d'électrodes est alimentée à partir d'une différence de potentiel $\bar{\varphi}_1 - \varphi_1^-$ à travers une résistance $r = C_{\mu} a \cos \beta / \sigma \varepsilon h$, la valeur de la différence $\bar{\varphi}_1 - \varphi_1^-$ peut être choisie arbitrairement.

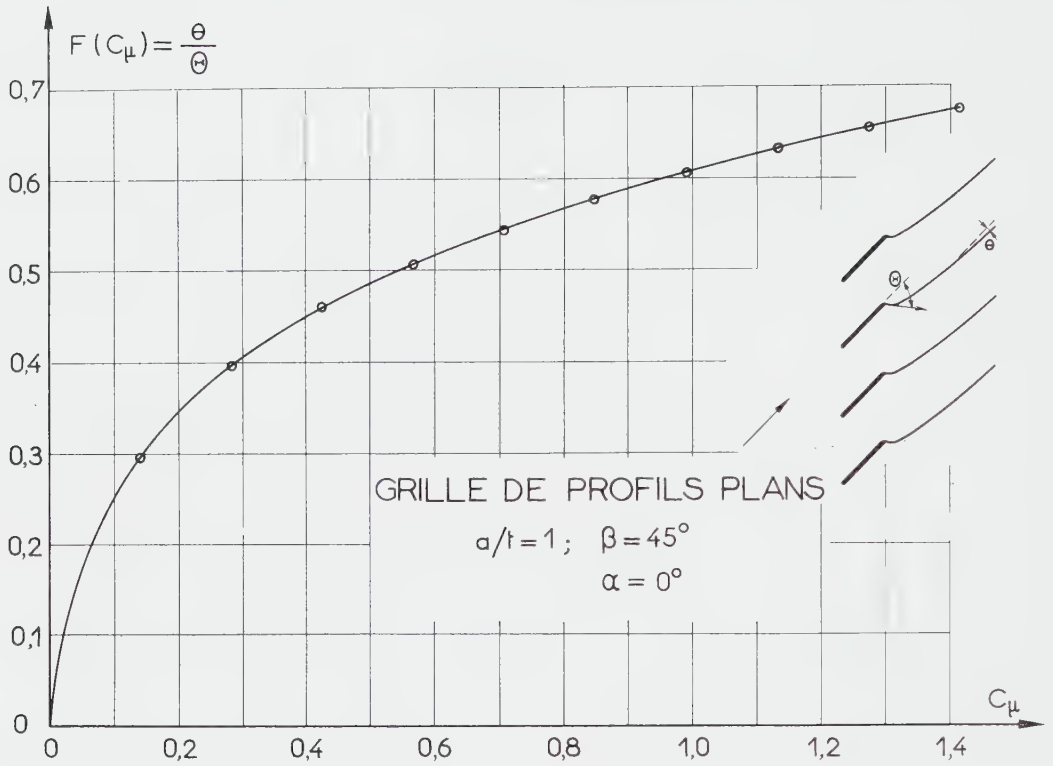


Fig. 26

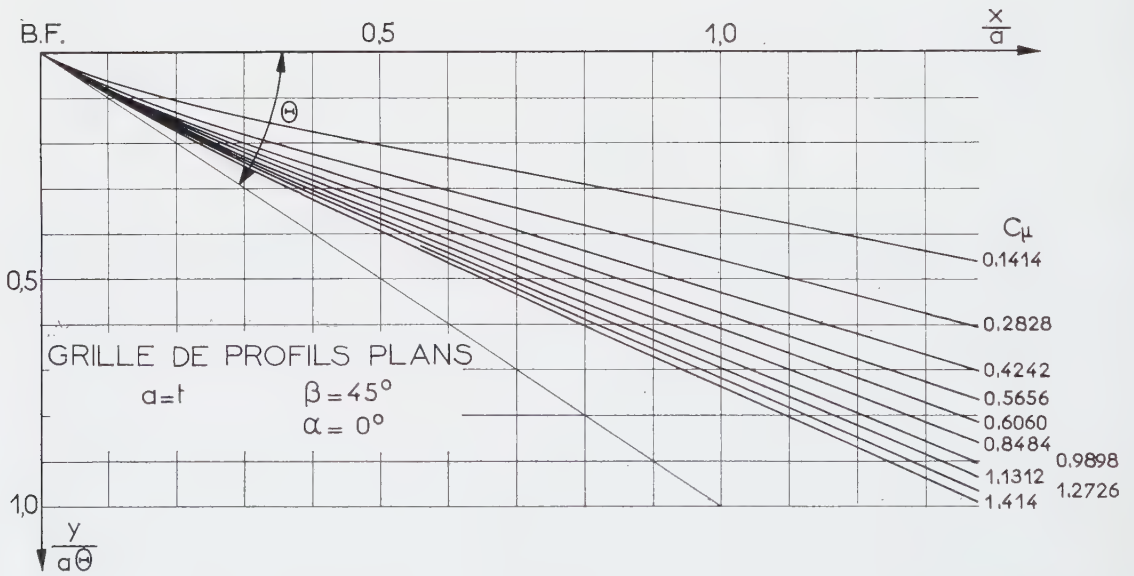


Fig. 27

D'après la relation (14), la fonction $F(C_\mu) = \frac{\theta_1}{\Theta_1}$ peut être déduite par :

$$(16) \quad F(C_\mu) = \frac{\theta_1}{\Theta_1} = \frac{(\varphi_1^+ - \bar{\varphi}_1)_\infty}{(\varphi_1^+ - \bar{\varphi}_1)_F}.$$

Cette formule permet de calculer la valeur de $F(C_\mu)$ à partir des mesures effectuées dans la cuve. D'une manière analogue, on peut montrer que la pente locale de la ligne de jet exprimée par y'_x est donnée par :

$$(17) \quad \frac{y'_x}{\Theta_1} = \frac{\varphi'_{1y}}{V_0 \Theta_1} = \frac{(\varphi_1^+ - \bar{\varphi}_1)_\infty}{(\varphi_1^+ - \bar{\varphi}_1)_F}.$$

Par intégration graphique à partir du bord de fuite F, on peut obtenir la forme de la ligne de jet, soit :

$$(18) \quad \frac{y}{a \Theta} = \int_F^{x/a} \frac{\varphi^+ - \bar{\varphi}}{(\varphi^+ - \bar{\varphi})_F} \frac{dx}{a}.$$

La variation de $F(C_\mu)$ est représentée sur la *figure 26*, la *figure 27* donne la forme des lignes de jet pour diverses valeurs de C_μ .

4,2 Représentation de $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Au point de vue du calcul analogique, il est plus commode de représenter directement le potentiel φ que d'obtenir le potentiel φ_2 . Pour l'application de la relation (9) nous sommes ainsi conduits à déduire φ_2 , ou plus précisément la fonction $G(C_\mu)$, de la connaissance de φ et φ_1 . Pour représenter le potentiel φ , chaque paire des électrodes e^+ et e^- en amont des profils dans les parties AO et A'O' de la cuve est alimentée à partir d'une différence de potentiel $\varphi^- - \varphi^+$ constante choisie arbitrairement; sur les lignes de jet FD et F'D', chaque paire d'électrodes e^+ et e^- est alimentée à travers une résistance $r = C_\mu a \cos \beta / \sigma \varepsilon h$ à partir d'une différence de potentiel $\bar{\varphi} - \varphi^-$, choisie elle aussi arbitrairement.

D'après l'équation (9) la déflexion θ dans ce cas est donnée par :

$$(19) \quad \theta = \Theta F(C_\mu) + \alpha G(C_\mu).$$

La valeur de $F(C_\mu)$ étant connue, à l'aide des formules (3) et (14) qui relient les valeurs des angles α , Θ et θ aux potentiels de la cuve, on peut calculer la valeur de $G(C_\mu)$ à partir de (19) :

$$(20) \quad G(C_\mu) = \frac{\theta - \Theta F(C_\mu)}{\alpha} = \frac{|(\varphi^+ - \bar{\varphi})_\infty - (\varphi^+ - \bar{\varphi})_F F(C_\mu)|}{(\varphi^- - \varphi^+)_\infty C_\mu \cos^2 \beta}.$$

Cette formule permet de déduire la valeur de $G(C_\mu)$ d'après les mesures de potentiel de la cuve.

Les calculs analogiques, effectués pour diverses valeurs de C_μ , ont donné les résultats représentés sur la *figure 28*; la variation de $G(C_\mu)$, est une fonction décroissante de C_μ .

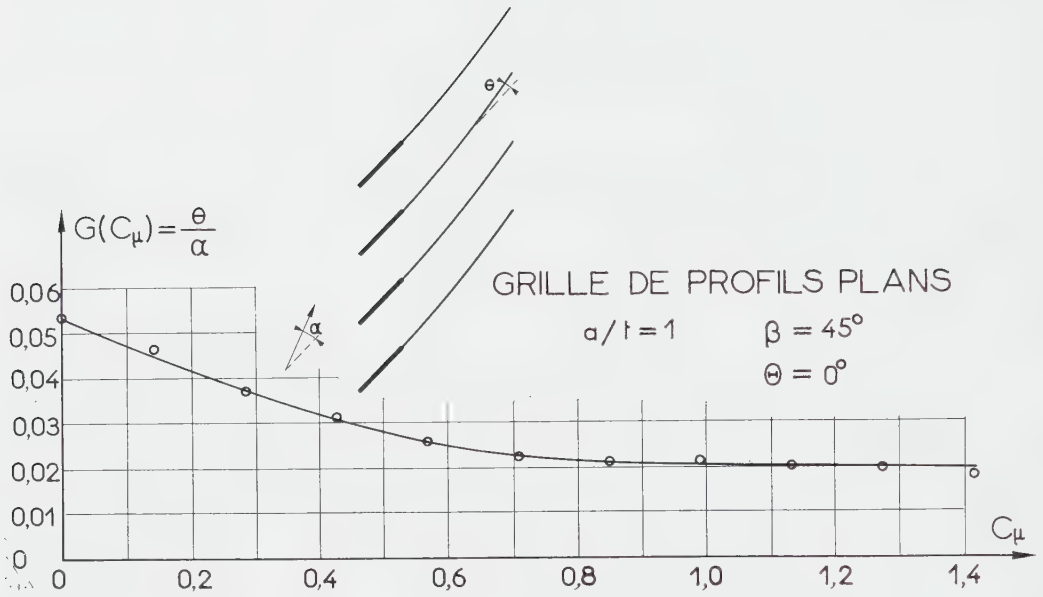


Fig. 28

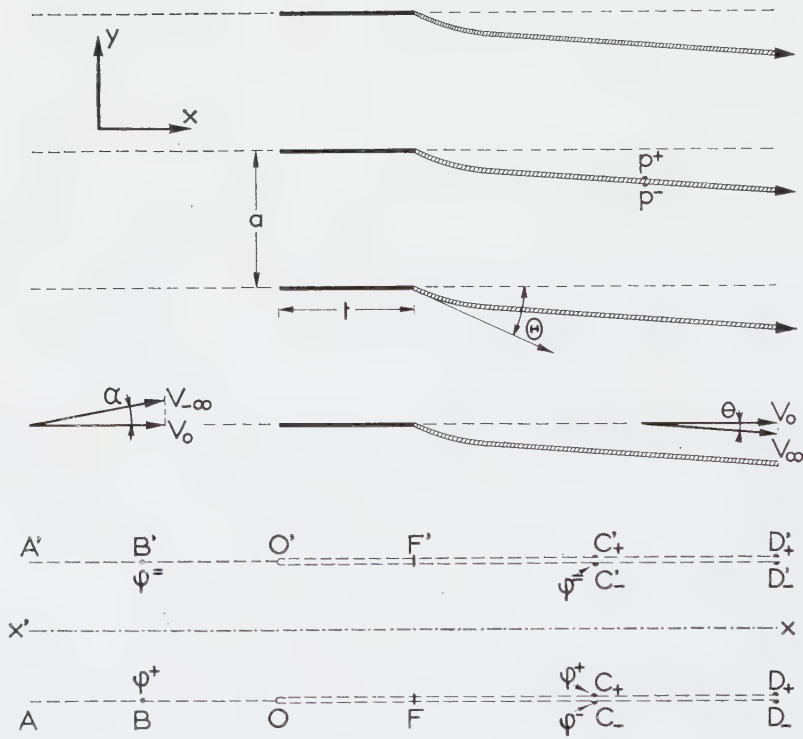


Fig. 29

5

GRILLE DROITE

(Fig. 29)

5,1 Propriété de symétrie impaire de φ ; conditions aux limites.

Lorsque l'angle de calage de la grille considérée est nul ($\beta = 0$) (fig. 29), comme les conditions aux limites qui déterminent φ portent uniquement sur la différence $\varphi^- - \varphi^+$ des valeurs de φ sur $A'D'$ et AD [cf. les équations (3) et (8)] et que, dans ce cas, ces droites sont symétriques par rapport à l'axe $x'x$, le champ de φ présente une symétrie impaire par rapport à l'axe $x'x$ (fig. 30 a). Soit φ_0 la valeur du potentiel sur $x'x$, on aura :

$$(21) \quad \varphi^+ - \varphi_0 = -(\varphi^- - \varphi_0) = \frac{\varphi^- - \varphi}{2}.$$

La détermination de φ peut alors être limitée au domaine correspondant à la bande $x'xDA$. Les conditions aux limites peuvent être déduites immédiatement des considérations du paragraphe 2, elles se résument comme suit (fig. 30 b) :

a) à l'infini amont et l'infini aval : $\varphi'_x = 0$;

b) en amont du profil sur la partie AO , la relation (3) devient :

$$(22) \quad \varphi_0 - \varphi = \frac{a V_0 \alpha}{2},$$

le potentiel φ^+ sur OA est donc constant;

c) sur le profil OF : $\varphi'_y = V_0 y'_x$; et en particulier si le profil est plan, on a $\varphi'_y = 0$;

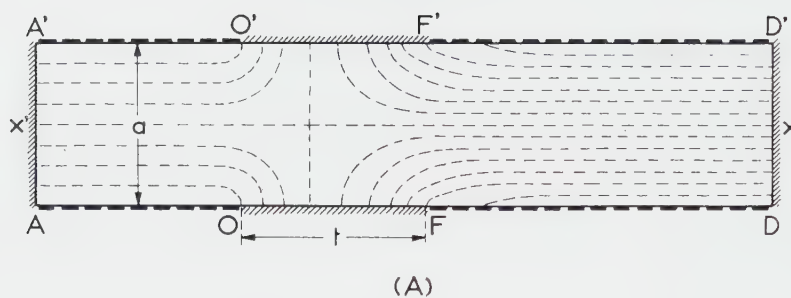
d) sur la partie FD , en remplaçant $\varphi^+ - \varphi^-$ par $2(\varphi - \varphi_0)$ (nous réservons la notation φ^+ pour désigner le potentiel sur OA seulement), et $\cos \beta$ par 1, la relation (8) s'écrit :

$$(23) \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{C_\mu a}{2} \varphi'_y = \frac{a V_0 \theta}{2} (C_\mu + 1).$$

5,2 Calcul analogique

Nous nous limitons à l'étude des grilles de profils plans. Le montage électrique est donné par la figure 30 c. Les bords Ax' et Dx de la cuve sont isolants pour avoir $\varphi'_x = 0$. La partie $x'x$ correspond à une électrode continue portée au potentiel φ_0 . La partie AO est formée par une électrode portée au potentiel φ^+ , et on doit avoir $\varphi_0 - \varphi^+ = \frac{a V_0 \alpha}{2}$, d'après (22); si l'incidence α est nulle, on a $\varphi^+ = \varphi_0$, les électrodes $x'x$ et AO sont reliées. La partie OF est isolante pour figurer le profil plan $\varphi'_y = 0$. La partie FD qui schématise la ligne de jet est recouverte par des petites électrodes de largeur e alimentées à partir du potentiel $\bar{\varphi}$ à travers des résistances r . En remplaçant φ'_y par $\frac{(\varphi - \bar{\varphi})}{\sigma \varepsilon h r}$, la condition (23) s'écrit :

$$(24) \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{C_\mu a}{2} \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{\sigma \varepsilon h r} = \frac{a V_0 \theta}{2} (C_\mu + 1).$$



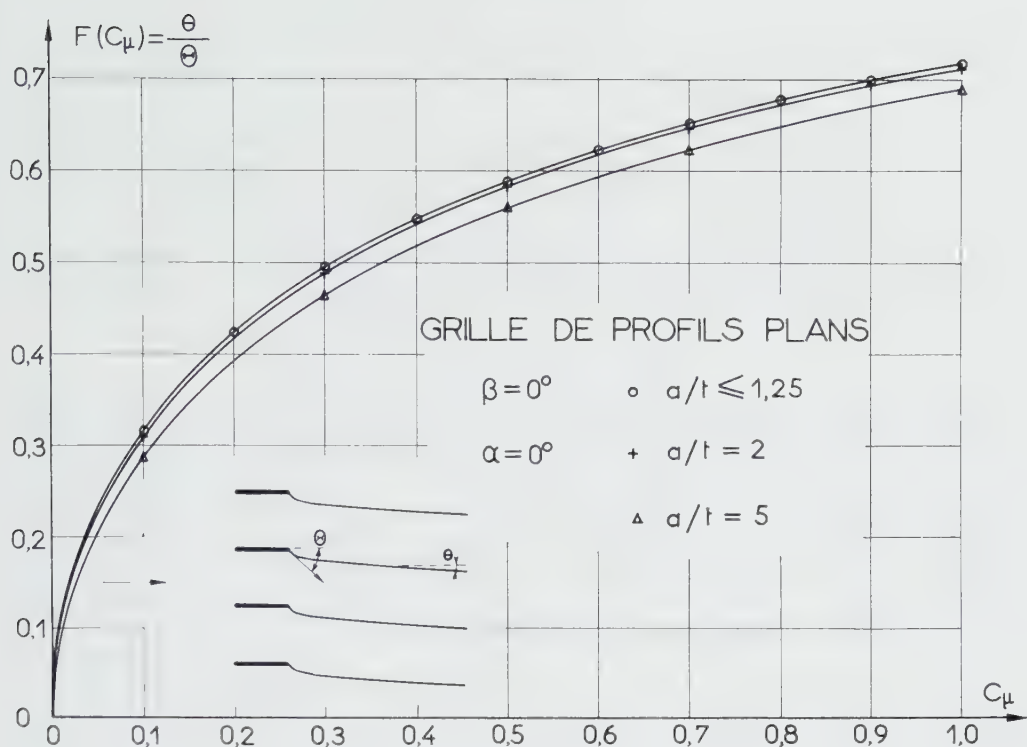


Fig. 31

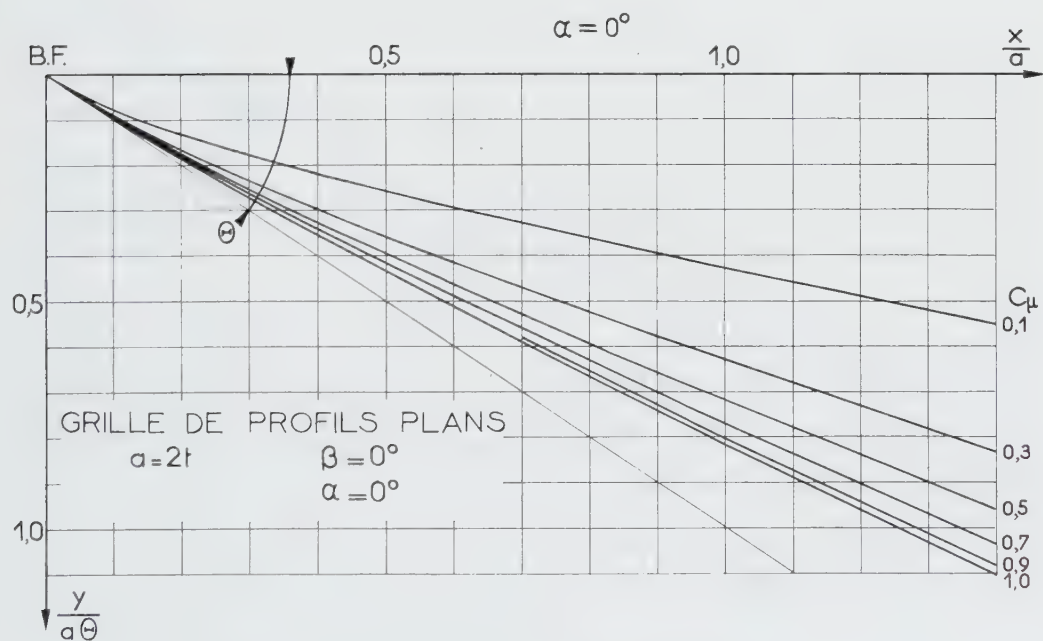


Fig. 32

En prenant :

$$(25) \quad r = \frac{C_\mu a}{2 \sigma \varepsilon h}$$

et :

$$(26) \quad \bar{\varphi} - \varphi_0 = -\frac{a V_0 \theta}{2} (C_\mu + 1),$$

la condition (24) sera satisfaite automatiquement. Les angles Θ et θ sont déduits de :

$$(27) \quad V_0 \Theta = 2 \frac{\varphi_r - \varphi}{C_\mu a} \quad \text{et} \quad V_0 \theta = 2 \frac{\varphi_\infty - \varphi}{C_\mu a}.$$

Les calculs analogiques ont été effectués pour le cas où l'angle incident à l'infini amont est nul ($\alpha = 0$), le jet, émis dans la direction Θ avec l'axe des x et pour différentes valeurs de l'entreplan relatif a/t ($= 1,25; 2$ et 5). La variation de $F(C_\mu) = \frac{\theta}{\Theta}$ est tracée sur la *figure 31* et les *figures 32, 33* et *34* donnent la forme de la ligne de jet.

5,3 Calcul analytique pour les faibles valeurs de C_μ .

Pour de faibles valeurs de C_μ il est évidemment légitime de faire une approximation sur le modèle du calcul analogique en remplaçant les résistances r , servant à alimenter les électrodes dans la partie FD, par un faible décrochement FEI dont la profondeur EF est fixée à $\frac{C_\mu a}{2}$. Les conditions aux limites relatives à cette approximation et concernant la fonction φ sont indiquées sur la *figure 35 a*.

On peut alors obtenir une solution analytique de ce problème en considérant la transformation de SCHWARZ [17] :

$$(28) \quad \frac{dz}{d\zeta} = K \frac{(\zeta - 1)^{1/2}}{\zeta (\zeta - \zeta_E)^{1/2}},$$

qui fait passer le domaine limité par $xx'AFEI$ du plan z au demi-plan supérieur ζ (*fig. 35 b*), les points x, x', A, F, E et I sont représentés respectivement par :

$$(29) \quad \zeta_x = -\infty, \quad \zeta_{x'} = \zeta_A = 0, \quad \zeta_F = 1, \quad \zeta_E = (1 + C_\mu)^2 \quad \text{et} \quad \zeta_I = +\infty$$

La position de ζ_0 qui représente le point O dépend à la fois du paramètre $\frac{a}{t}$ et de la valeur de C_μ , toutefois, C_μ étant faible, compte tenu de l'approximation adoptée, nous pouvons fixer ζ_0 en choisissant $C_\mu = 0$; nous trouvons dans ces conditions :

$$(29) \quad \zeta_0 = e^{-2\pi t/a},$$

Ensuite, la transformation :

$$(30) \quad \zeta - \frac{\zeta_E + \zeta_0}{2} = \frac{\zeta_E - \zeta_0}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)$$

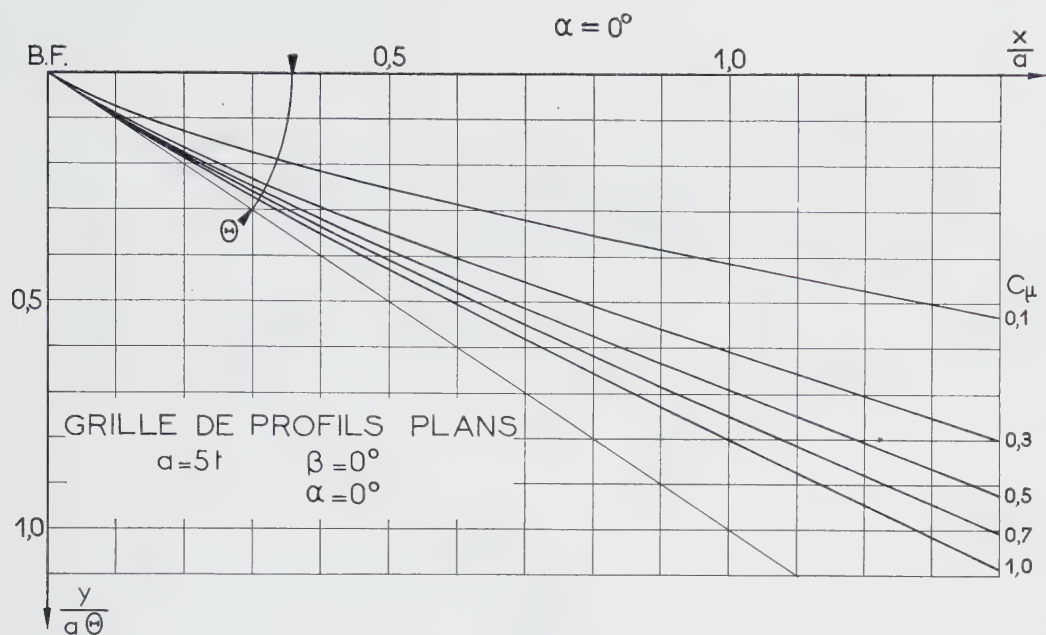


Fig. 33

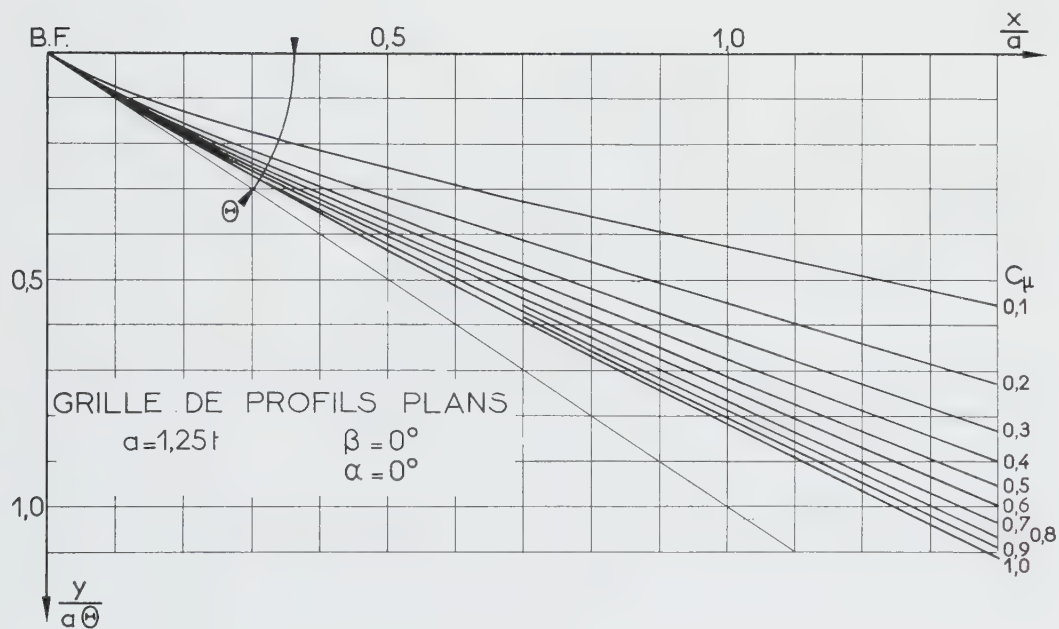


Fig. 34

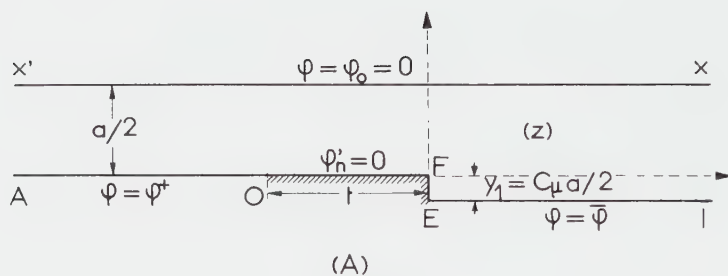


Fig. 35 a

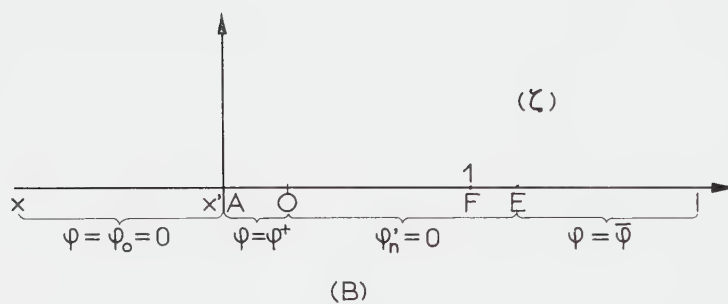


Fig. 35 b

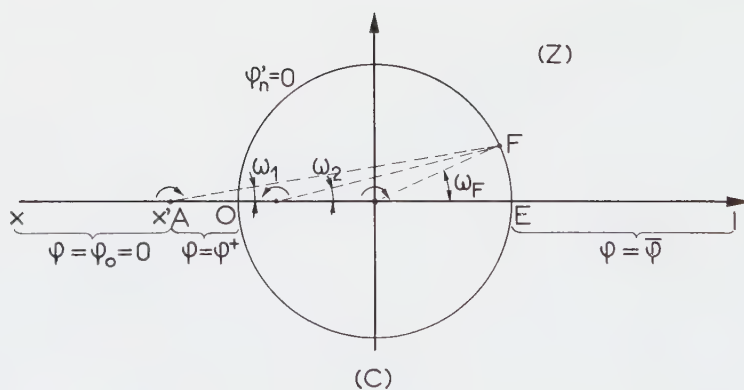


Fig. 35 c

fait passer du plan ζ au plan Z , où le segment OFE est transformé en un demi-cercle de rayon égal à l'unité (*fig. 35 c*). Les conditions aux limites qui déterminent la fonction φ dans le plan Z sont :

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 = 0 && \text{sur } xx', \\ \varphi &= \varphi^+ && \text{sur } AO, \\ \varphi'_n &= 0 && \text{sur la circonférence OFE,} \\ \varphi &= \bar{\varphi} && \text{sur EI.}\end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que la fonction φ est donnée par :

$$(31) \quad \varphi = \Re \left\{ \frac{i\varphi^+}{\pi} \log \frac{Z - Z_A}{Z - 1/Z_A} + \frac{i\bar{\varphi}}{\pi} \log Z + \bar{\varphi} \right\}.$$

On a vu qu'il était commode de décomposer φ en deux parties en écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 correspond à un écoulement avec un angle incident nul à l'amont et à soufflage « singulier » (le jet est émis dans la direction $\Theta_1 = \Theta$ avec l'axe des x) et φ_2 correspond à un écoulement avec un angle incident $\alpha_2 = \alpha$ et un soufflage « régulier » (le jet est émis suivant le prolongement du profil plan ($\Theta_2 = 0$)). Nous déterminerons φ_1 et φ_2 séparément.

5.3.1 φ_1 , ÉCOULEMENT A L'INCIDENCE NULLE, SOUFFLAGE « SINGULIER »

Comme α est nul dans ce cas, on a $\varphi^+ = \varphi_0 = 0$ sur AO, la fonction dans le plan Z est donnée par :

$$(32) \quad \varphi_1 = \Re \left\{ \frac{i\bar{\varphi}_1}{\pi} \log Z + \bar{\varphi}_1 \right\}.$$

La fonction $F(C_\mu)$ qui désigne le rapport $\frac{\theta_1}{\Theta_1}$ est déduite des équations (26) et (27) :

$$(33) \quad F(C_\mu) = \frac{\theta_1}{\Theta_1} = \frac{C_\mu}{(1 \pm C_\mu)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\varphi_{1F}}{\bar{\varphi}_1}\right)}.$$

L'expression (32) permet de calculer :

$$(34) \quad \left(1 - \frac{\varphi_{1F}}{\bar{\varphi}_1}\right) = \frac{\omega_F}{\pi},$$

où ω_F désigne l'argument du point F sur le cercle.

A partir de la formule de transformation (30), on peut écrire :

$$(35) \quad \frac{\zeta_F - \zeta_0}{\zeta_E - \zeta_0} = \frac{1}{2} (1 + \cos \omega_F) \simeq 1 - \frac{\omega_F^2}{4},$$

puisque on est dans le cas où la valeur de ω_F est faible. Compte tenu des valeurs de

ζ_0 , ζ_F et ζ_E données par (29), et étant donné que $e^{-2\pi l/a}$ est petit devant l'unité pour les valeurs usuelles de $\frac{l}{a}$, on déduit finalement :

$$(36) \quad \frac{\omega_F}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sqrt{2 C_\mu} \sqrt{1 + e^{-2\pi l/a}},$$

où les termes infiniment petits d'ordre supérieur sont négligés. En éliminant le terme $\left(1 - \frac{\varphi_{1F}}{\varphi_1}\right)$ par (34) et (36) dans (33), on obtient la formule :

$$(37) \quad F(C_\mu) = \frac{\theta_1}{\Theta_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi l/a}}} \frac{\pi \sqrt{C_\mu}}{2 \sqrt{2} (1 + C_\mu)}.$$

Si l/a tend vers infini, la fonction $F(C_\mu)$ se réduit à :

$$(38) \quad F(C_\mu)_{l \rightarrow \infty} = \frac{\pi \sqrt{C_\mu}}{2 \sqrt{2} (1 + C_\mu)}.$$

Ainsi, pour le cas général, on peut écrire :

$$(39) \quad F(C_\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi l/a}}} F(C_\mu)_{l \rightarrow \infty}.$$

où $\frac{1}{(1 + e^{-2\pi l/a})^{1/2}}$ constitue un facteur de correction, sa valeur en fonction de $\frac{l}{a}$ est donnée sur le tableau suivant :

$\frac{l}{a} \dots\dots\dots$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{1}{(1 + e^{-2\pi l/a})^{1/2}} \dots\dots\dots$	0,807	0,895	0,932	0,961	0,979
$\frac{l}{a} \dots\dots\dots$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{1}{(1 + e^{-2\pi l/a})^{1/2}} \dots\dots\dots$	0,987	0,995	0,997	0,999	1,000

La variation de $F(C_\mu)$ calculée à partir de la formule (37) est représentée sur la *figure 36*; sur la même figure les résultats du calcul analogique sont tracés en pointillé. On voit que les courbes que donne le calcul pour les faibles C_μ sont confondues avec celles du calcul analogique tant que C_μ est inférieur à 0,1.

5,3 2 φ_2 , ÉCOULEMENT AVEC INCIDENCE, SOUFFLAGE « RÉGULIER »

Dans ce cas, la formule (31) donne la fonction cherchée φ_2 . La condition $\varphi_2 = 0$ est traduite par $\varphi_{2F} = \bar{\varphi}_2$ d'après (27). En écrivant cette condition à l'aide de (31) on trouve :

$$(40) \quad \frac{\bar{\varphi}_2}{\varphi_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_F}$$

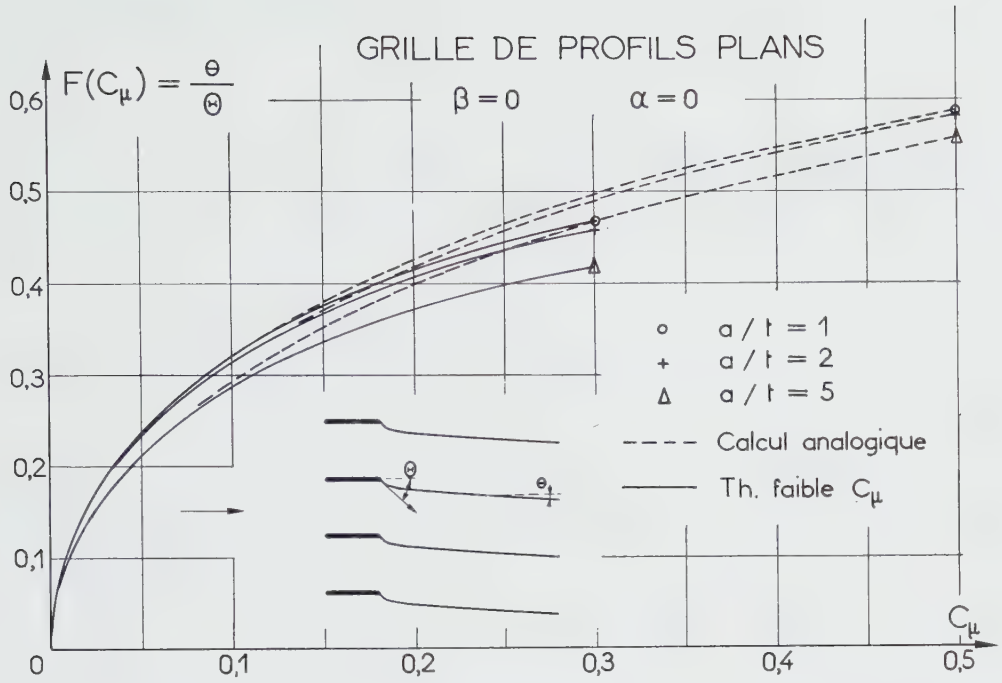


Fig. 36

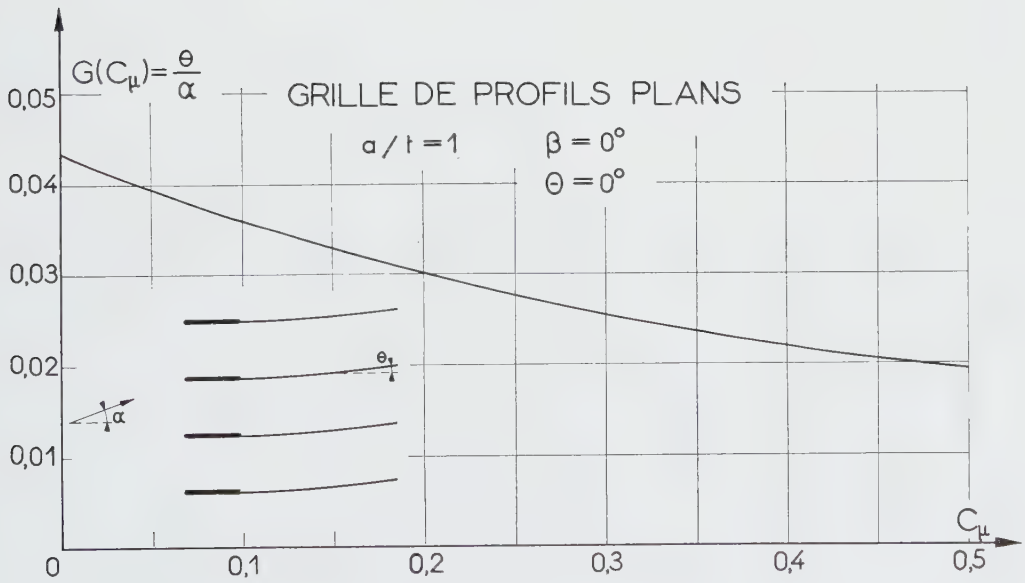


Fig. 37

où ω_F , ω_1 et ω_2 sont respectivement les arguments de Z_F , $Z_F - Z_A$ et $Z_F - 1/Z_A$. Lorsque ω_F est petit, les angles ω_1 et ω_2 sont reliés à ω_F par les relations suivantes :

$$(41) \quad \omega_1 = \frac{\omega_F}{1 - Z_A}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_F}{1 - 1/Z_A}.$$

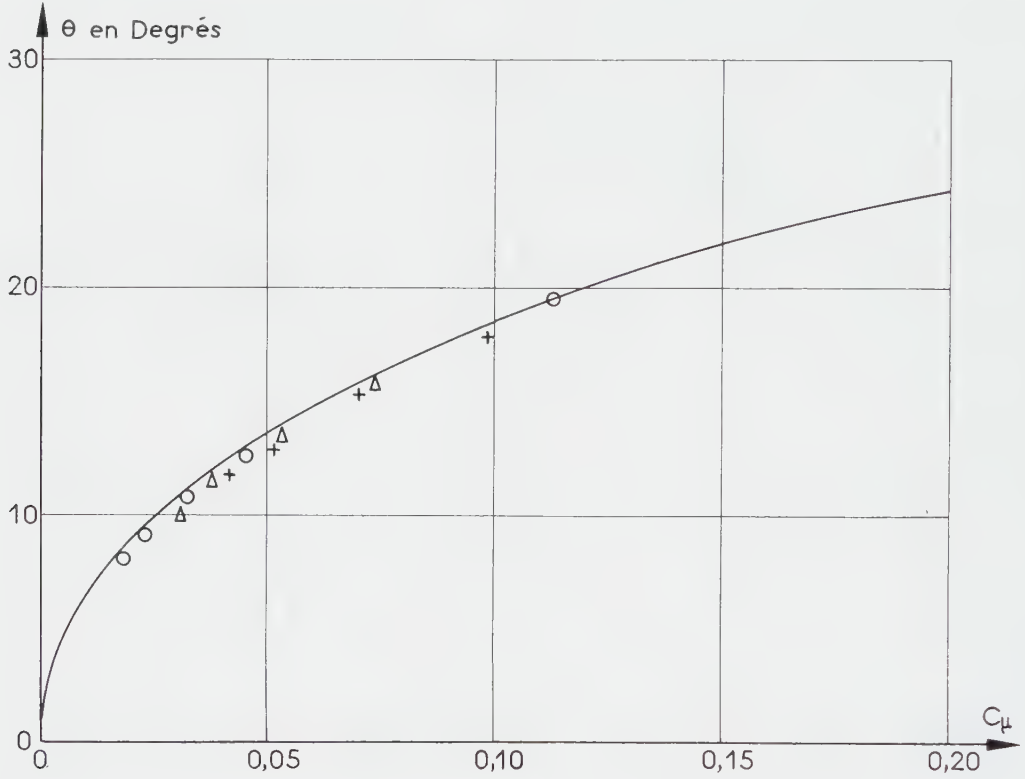


Fig. 38

D'autre part, on peut déduire Z_A par la formule de transformation (30) :

$$(42) \quad Z_A = - \frac{\sqrt{\xi_E} + \sqrt{\xi_0}}{\sqrt{\xi_F} - \sqrt{\xi_0}}.$$

Compte tenu des valeurs de ξ_0 et ξ_E données par (29), l'équation (40) s'écrit :

$$(43) \quad \frac{\bar{\varphi}_2}{\varphi_2} = \frac{\rho - \pi/2}{(1 + G_{\mu})}.$$

La fonction $G(C_{\mu})$ qui désigne le rapport $\frac{\theta_2}{\alpha_2}$ est déduite des équations (22) et (26), on a :

$$(44) \quad G(C_{\mu}) = \frac{\theta_2}{\alpha_2} = \frac{1}{(1 + G_{\mu})} \frac{\bar{\varphi}_2}{\varphi_2}.$$

En éliminant $\frac{\bar{\varphi}_2}{\varphi_2^+}$ de l'équation (44) par l'équation (43), on obtient la formule suivante :

$$(45) \quad G(C_\mu) = \frac{e^{-\pi l, a}}{(1 + C_\mu)^2}.$$

La variation de $G(C_\mu)$, calculée à partir de la formule (45) pour une grille droite d'entreplan relatif $\frac{a}{l} = 1$, est représentée sur la *figure 37*.

5,4 Confrontation théorie-expérience

Il est intéressant de signaler qu'une étude expérimentale a été effectuée à l'O.N.E.R.A., par J. Paulon [18], dans une soufflerie où était montée une grille droite constituée par des profils symétriques NACA 0012 avec entreplan relatif $\frac{a}{l} = 0,916$. En amont, l'écoulement était à l'incidence nulle. Les jets étaient émis perpendiculairement aux profils. La déflexion θ était mesurée à une distance d'environ une corde à l'aval des bords de fuite. En remplaçant les angles par leur sinus, la formule (37) peut être extrapolée et devient :

$$(46) \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi l, a}}} \cdot \frac{\pi \sqrt{C_\mu}}{2 \sqrt{2} (1 + C_\mu)}.$$

Les résultats que donne cette expression s'accordent de manière satisfaisante (*fig. 38*) avec l'ensemble des mesures de déflexion effectuées sur la grille décrite.

SOUFFLAGE AU BORD DE FUITE DES PROFILS D'UN DISTRIBUTEUR

1

INTRODUCTION

En généralisant le principe développé pour l'étude de l'écoulement plan autour d'une grille avec soufflage au bord de fuite des profils, il est possible de traiter certains écoulements tridimensionnels qui intéressent les machines tournantes et, en particulier, de déterminer l'écoulement qui traverse un distributeur isolé de compresseur axial [11]. Nous considérons ici un distributeur constitué par quatre bras carénés formant supports du corps central du compresseur (*fig. 39*); le bord de fuite de chaque profil est muni d'une fente à travers laquelle on peut produire un soufflage dont la direction convenablement choisie est susceptible de créer une rotation de l'écoulement principal traversant ce distributeur.

Nous nous proposons de traiter les deux problèmes suivants :

a) considérant d'abord un angle d'éjection du soufflage Θ constant le long du bord de fuite de chaque profil, nous cherchons ce que devient la déflexion de l'écoulement principal à l'aval pour diverses intensités de soufflage;

b) pour réaliser à l'aval un écoulement du type « free vortex », qui correspond à la superposition d'un écoulement uniforme axial et d'un écoulement engendré par un tourbillon placé suivant l'axe, nous cherchons la loi qu'il faut prendre pour fixer l'angle d'éjection du soufflage le long du bord de fuite de chaque profil.

2

THÉORIE

Un système de coordonnées cylindriques x, R et ω est utilisé; l'axe des x coïncide avec l'axe de la machine et est dirigé suivant la direction V_0 de la vitesse uniforme de l'écoulement en amont, R désigne la distance radiale d'un point considéré, l'angle polaire ω est mesuré à partir du plan *eadh*. Dans le cadre de la théorie linéarisée le profil symétrique des bras carénés sera remplacé par un profil plan sans épaisseur et disposé parallèlement à l'axe de la machine. La linéarisation est faite autour de l'écoulement uniforme de vitesse V_0 . L'écoulement est défini par son potentiel des

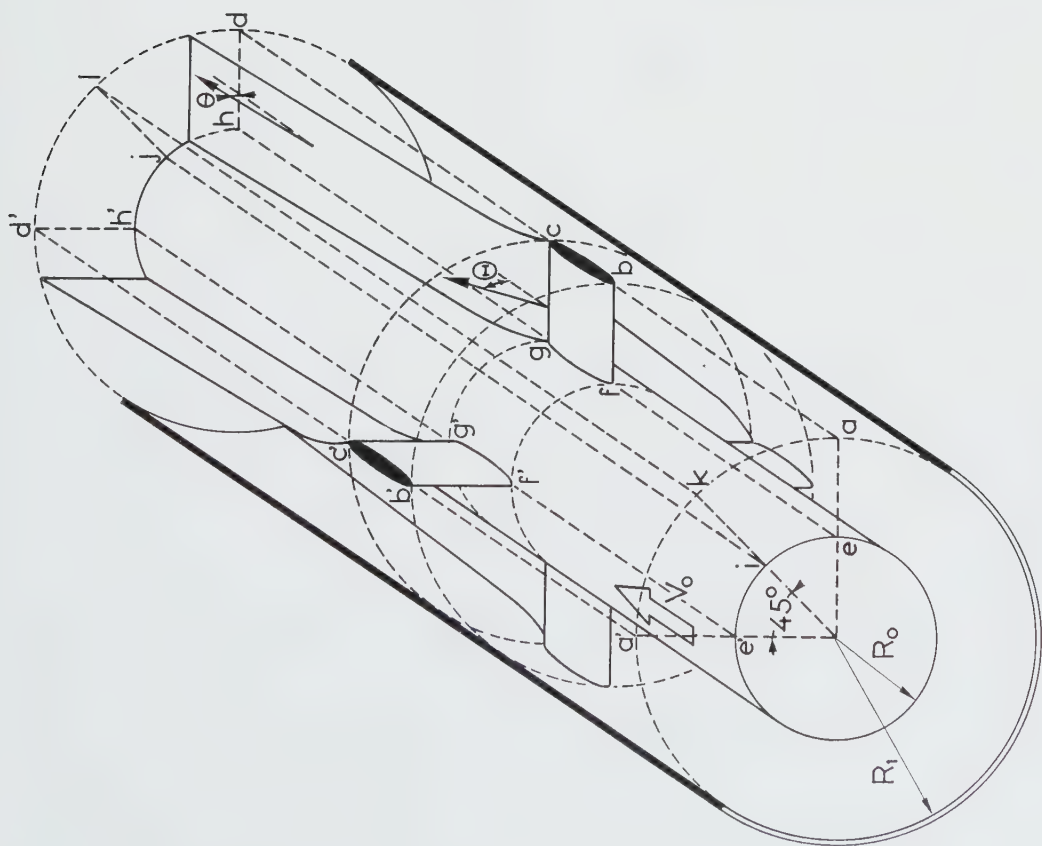


Fig. 39 a

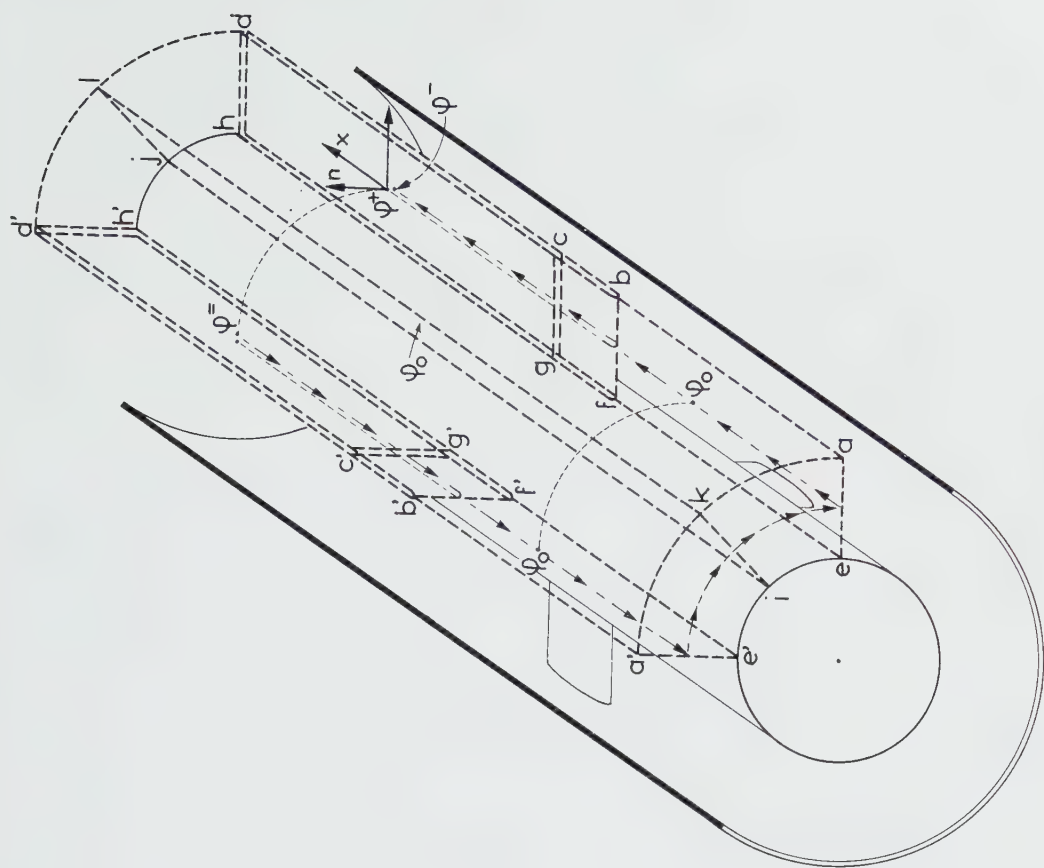


Fig. 39 b

vitesses de perturbation φ . Compte tenu des propriétés de périodicité et de l'antisymétrie du champ φ , le domaine où l'on effectuera sa détermination peut être réduit à un secteur correspondant à un huitième de la veine, soit dans le secteur limité par les plans $eadh$ et $iklj$.

Les conditions aux limites sont ainsi les suivantes :

a) à l'infini amont et à l'infini aval, la condition de conservation du débit de l'écoulement principal exige que $(\varphi'_x)_{-\infty} = 0 = (\varphi'_x)_{+\infty}$;

b) étant donné que l'écoulement à l'infini amont est axial, et compte tenu de la propriété d'antisymétrie du champ des vitesses de perturbation, φ est égal à une constante φ_0 sur les plans $iklj$ et $eabf$;

c) sur le profil plan $fbcg$ et sur les parois cylindriques externes ($R = R_1$) et interne ($R = R_0$), la condition de glissement exige que la dérivée normale $\varphi'_n = 0$;

d) sur la projection de la nappe-jet, bande $gcdh$, on écrit la condition d'équilibre de chaque filet fluide qui se trouve à l'intersection de la nappe-jet avec un cylindre de rayon r donné : $p_+ - p_- = \frac{Q_j V_j}{rR}$, où Q_j et V_j représentent respectivement le débit par unité de longueur de la fente et la vitesse d'éjection du soufflage, ces quantités sont supposées homogènes tout le long de la fente, r désigne le rayon courbure du filet considéré; $p_+ - p_-$ est la différence de pression régnant entre les deux faces de la nappe-jet. Ici, la courbure $\frac{1}{rR}$ peut être remplacée par $-\frac{\varphi''_{n,x}}{V_0}$ où $\varphi''_{n,x}$ désigne la dérivée normale de φ prise sur le plan $gcdh$, la direction de la normale étant orientée vers l'intérieur du domaine considéré. En appliquant la formule de BERNOULLI linéarisée et compte tenu de la propriété d'antisymétrie de φ par rapport aux plans $eadh$, on a $p_+ - p_- = -2\rho V_0 \varphi''_{x'}$, et la condition d'équilibre du jet s'écrit finalement :

$$(1) \quad 2\rho V_0 \varphi''_{x'} = \frac{Q_j V_j}{V_0} \varphi''_{n,x'}$$

En introduisant le coefficient :

$$(2) \quad C_\mu = \frac{4 Q_j V_j}{\rho V_0^2 \pi (R_1 + R_0)}$$

qui est le rapport entre la quantité de mouvement du jet débité par les quatre profils $4 Q_j V_j (R_1 - R_0)$ et celle de l'écoulement principal à l'infini amont $\rho V_0^2 \pi (R^2 - R_0^2)$, puis en intégrant par rapport à x , la condition (1) devient :

$$(3) \quad \varphi^+ = \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0)}{8} \varphi''_{n,x'} + K,$$

la constante K est fixée par la condition au bord de fuite du profil où $\varphi^+ = \varphi^+_F(R)$ et $\varphi''_{n,x'} = V_0 \Theta(R)$, où $\Theta(R)$ est la loi de répartition de l'angle d'éjection du soufflage au bord de fuite. Ainsi, la condition (3) s'écrit finalement :

$$(4) \quad \varphi^+ = \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0)}{8} [\varphi''_{n,x'} - V_0 \Theta(R)] + \varphi^+_F(R).$$

La déflexion de l'écoulement principal sera observée à l'infini aval, soit le long de hd , où l'angle de déflexion est donné par $\theta = \frac{(\varphi_n^{+'})_{\infty}}{V_0}$; $(\varphi_n^{+'})_{\infty}$ qui figure dans cette relation est la dérivée normale de φ sur le plan $gcdh$ à l'infini aval.

3

CALCUL PAR ANALOGIE RHÉOÉLECTRIQUE

Le potentiel φ est identifié au potentiel électrique d'une cuve qui représente le secteur limité par les plans $eadh$ et $iklj$ de la veine. La figure 40 représente le montage

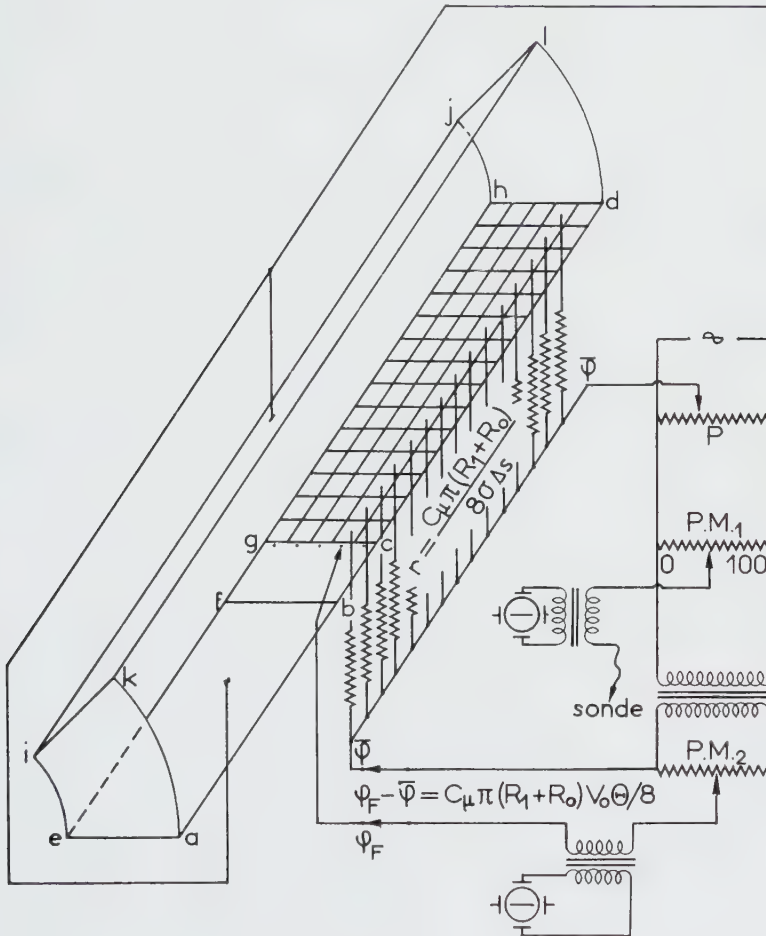


Fig. 40

électrique. Les bords $eaki$ et $hdlj$ considérés respectivement comme infini amont et infini aval sont isolants d'après a). Les parties $eklj$ et $eabf$ sont figurées par de grandes électrodes portées au potentiel $\varphi_0 = 100$ d'après b). Les parois cylindriques externe et interne et la partie $fbcg$, qui représente le profil plan, sont isolantes d'après c). La partie $gcdh$ formant le sillage est recouverte de petites électrodes dont la surface

mouillée est désignée par Δs ; ces électrodes se partagent en onze rangées pour représenter onze intervalles suivant le rayon; chaque électrode est alimentée à travers une résistance r à partir d'un potentiel $\bar{\varphi}$ qui est constant le long de chaque rangée, il y a donc onze potentiomètres P pour alimenter les onze rangées d'électrodes. En remplaçant $\varphi_n^{+'}$ par $\frac{(\varphi_n^{+'} - \bar{\varphi})}{\sigma \Delta s r}$ la condition (4) s'écrit :

$$(5) \quad \varphi^+ = \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0)}{8} \frac{(\varphi^+ - \bar{\varphi})}{\sigma \Delta s r} - \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0)}{8} V_0 \Theta (R) + \varphi_F^+ (R);$$

pour que la condition (5) soit vérifiée automatiquement, il faut choisir $r = \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0)}{8 \sigma \Delta s}$ et :

$$(6) \quad \varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R) = \frac{C_\mu \pi (R_1 + R_0) V_0 \Theta (R)}{8}.$$

Au bord de fuite gc , devant chaque rangée d'électrodes du sillage, on avait placé des sondes afin de relever les valeurs de φ_F^+ au bord de fuite.

En vue d'ultérieures confrontations avec des mesures prévues sur un distributeur en projet, les données géométriques ont été choisies de la façon suivante :

- le rapport entre le rayon externe R_1 et le rayon interne R_0 est égal à $\frac{1}{0,625}$;
- la longueur de la corde des profils est constante;
- l'entreplan relatif est égal à 3,38 au moyeu et 5,4 à la périphérie.

Ainsi, les rayons externe et interne du modèle ont été fixés respectivement à 53,3 cm et 33,3 cm pour obtenir une largeur de sillage égale à la dimension habituellement adoptée de 20 cm et la longueur de la corde du profil a été fixée à 15,5 cm.

4 ÉCOULEMENT AVEC L'ANGLE DE SOUFFLAGE Θ CONSTANT

Pour représenter analogiquement cet écoulement, il faut régler la valeur $\varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R)$ à une valeur constante d'après la relation (6); d'ailleurs, la valeur de cette constante peut être choisie arbitrairement et on déterminera ensuite la valeur de Θ correspondante à partir de la relation (6). A l'aide du pont de mesure PM_2 , alimenté par transformateur, il est possible en agissant sur les potentiomètres P de régler $\varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R)$ à une valeur constante le long du bord de fuite gc . En remplaçant $(\varphi_n^{+'})_\infty$ par $V_0 \Theta$ et compte tenu des relations (4) et (6), on déduit :

$$(7) \quad V_0 \Theta = \frac{8}{C_\mu \pi (R_1 + R_0)} |\varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R)|$$

et, en définitive, la formule suivante :

$$(8) \quad \frac{\Theta}{\Theta} = \frac{\varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R)}{\varphi_F^+ (R) - \bar{\varphi} (R)},$$

la mesure de la différence de potentiel $\varphi_x^+(R) - \bar{\varphi}(R)$ le long de hd ; la formule (8) permet de définir la répartition correspondante de $\frac{\theta}{\Theta}$.

La déflexion de l'écoulement à l'infini aval, caractérisée par la répartition de $\frac{\theta}{\Theta}$

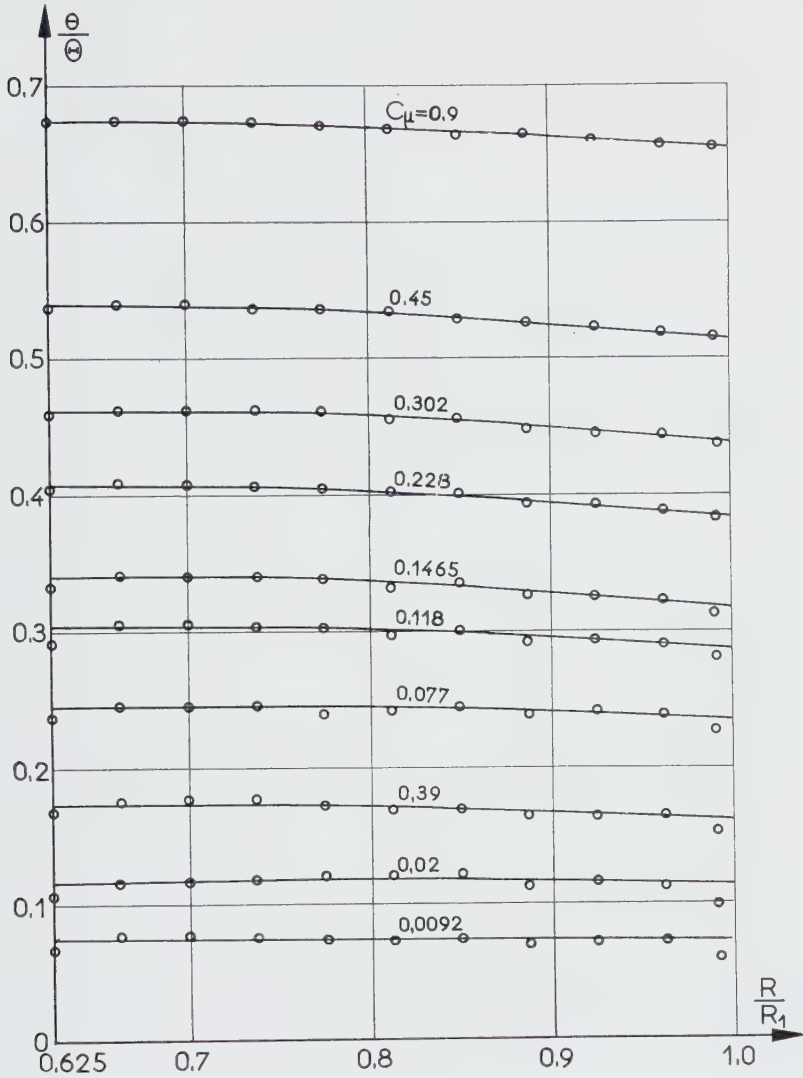


Fig. 41

le long de hd ($0,625 \leq \frac{R}{R_1} \leq 1$) pour diverses valeurs de C_μ ($0 < C_\mu < 0,9$), est représentée par la figure 41. On remarque que la déflexion est légèrement plus faible à la périphérie qu'au moyen.

La variation de $\frac{\theta}{\Theta}$ en fonction de C_μ aux rayons $\frac{R}{R_1} = 0,6625$ et $\frac{R}{R_1} = 0,9625$ est donnée sur la figure 42. Pour comparaison, on a reproduit sur cette figure les

résultats de l'écoulement bidimensionnel. On constate qu'au rayon $\frac{R}{R_1} = 0,6625$, où l'entreplan relatif est égal à 3,58, la courbe est pratiquement confondue avec la courbe bidimensionnelle qui correspond à l'entreplan relatif égal à 5. On en conclut que, dans l'écoulement tridimensionnel considéré, la déflexion est légèrement plus faible que celle prévue par la théorie bidimensionnelle.

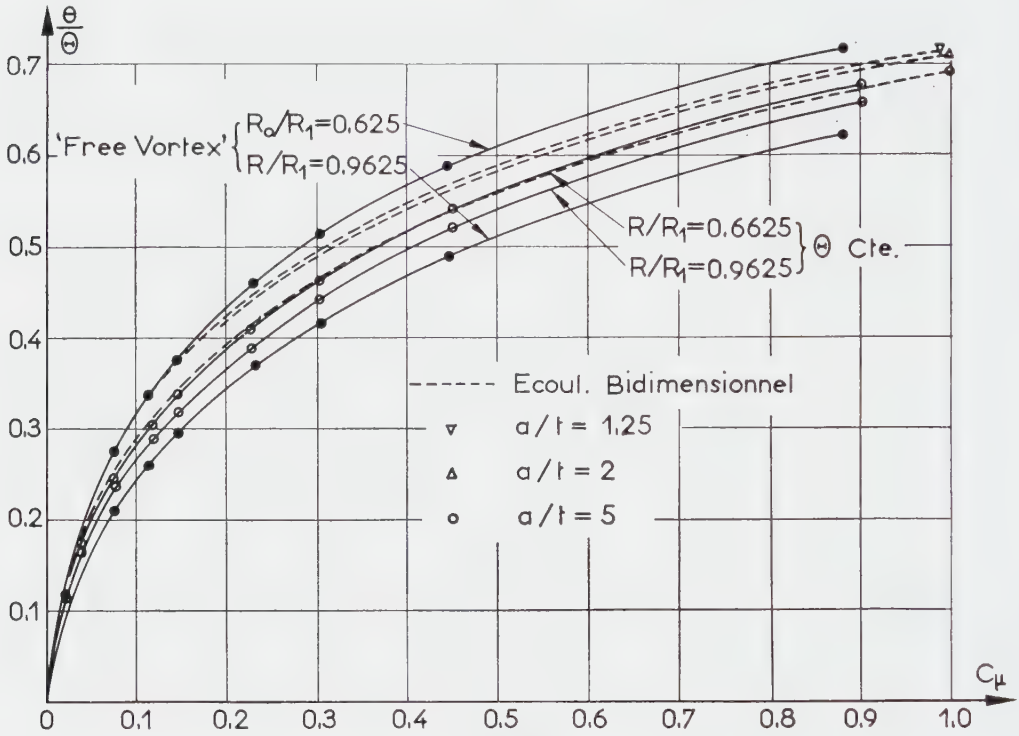


Fig. 42

5₁

ÉCOULEMENT « FREE VORTEX » A L'INFINI AVAL

Si l'écoulement à l'infini aval est du type « free vortex », le potentiel des vitesses de perturbation à l'infini aval est équivalent au potentiel engendré par un tourbillon placé sur l'axe de la machine, c'est-à-dire que dans ce cas la valeur de φ' est constante sur hd en même temps que φ est égal à φ_0 (constante) sur jl .

Dans le calcul analogique, on peut, en agissant sur les potentiomètres P et à l'aide du pont de mesure PM₁, régler φ' à une valeur constante choisie arbitrairement, on réalise ainsi un écoulement engendré par un tourbillon axial à l'infini aval. Si l'on désigne par Θ_m l'angle de soufflage au moyeu, la valeur de Θ pour un autre rayon sera caractérisée par le rapport $\frac{\Theta}{\Theta_m}$, ce rapport est donné par :

$$(9) \quad \frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{\varphi'_F(R) - \varphi'_F(R_0)}{\varphi'_F(R_0) - \varphi'_F(R_0)}$$

d'après (6). La mesure de la différence de potentiel $\varphi_f^+(R) - \varphi(R)$ effectuée le long du bord de fuite gc donne, d'après (9), la loi $\frac{\Theta}{\Theta_m}$ qui définit l'angle de soufflage au bord de fuite. La figure 43 représente la variation de $\frac{\Theta}{\Theta_m}$ en fonction de $\frac{R}{R_1}$ pour diverses valeurs de C_μ . On constate que l'angle Θ décroît au fur et à mesure que le rayon croît,

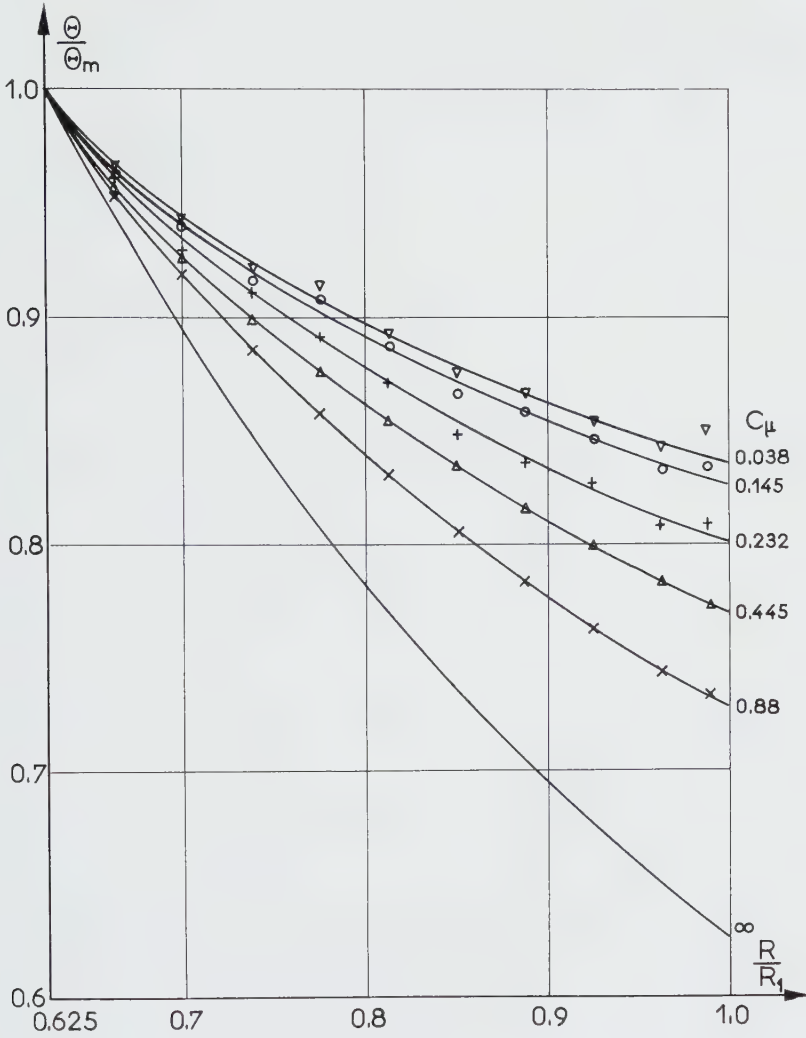


Fig. 43

la décroissance s'amplifie avec la valeur de C_μ . On remarquera d'ailleurs que ce résultat pouvait être prévu qualitativement; si l'on se place, en effet, dans le cas limite d'une intensité de soufflage infiniment grande ($C_\mu \rightarrow \infty$, nappe-jet pratiquement rigidifiée), on remarque que l'écoulement « free vortex » est automatiquement formé dès l'émission du jet et, par conséquent, que la loi $\frac{\Theta}{\Theta_m}$ est évidemment donnée par :

$$(10) \quad \frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{R_0}{R}.$$

Pour caractériser la déflexion de l'écoulement à l'infini aval quand C_μ varie, il suffit de connaître le rapport $\frac{\theta}{\Theta}$ en fonction de C_μ pour un rayon particulier, la déflexion pour un autre rayon peut se déduire de :

$$(11) \quad \frac{\theta}{\theta_1} = \frac{R_1}{R}.$$

Les variations de $\frac{\theta}{\Theta}$ en fonction de C_μ dans la section du moyeu ($\frac{R_0}{R_1} = 0,625$) et dans une section près de la périphérie ($\frac{R}{R_1} = 0,9625$) est représentée sur la *figure 42*. Au moyeu où l'entreplan relatif est égal à 3,38, la courbe de $\frac{\theta}{\Theta}$ est supérieure à celle de la prévision que donne la théorie bidimensionnelle; par contre au rayon $\frac{R}{R_1} = 0,9625$ où l'entreplan relatif est égal à 5,2, la courbe de $\frac{\theta}{\Theta}$ lui est inférieure.

CHAPITRE VI

SOUFFLAGE A L'INTRADOS D'UNE AILE

1

INTRODUCTION

Il est maintenant bien connu que le soufflage au bord de fuite d'un profil permet d'obtenir des portances très élevées; cette augmentation de portance est toutefois accompagnée d'un moment piqueur important, ce moment piqueur est défavorable car, lorsqu'il est nécessaire de l'équilibrer au moyen d'une gouverne, une partie du gain obtenu sur la portance peut être perdu. Pour ce motif, il a paru intéressant d'étudier l'effet d'un jet placé à l'intrados du profil [15]; un tel type de soufflage est, en effet, susceptible de diminuer le moment piqueur, mais il reste alors à connaître son influence sur la circulation et la portance.

2

THÉORIE DU SOUFFLAGE A L'INTRADOS D'UN PROFIL

Nous considérons l'écoulement plan autour d'un profil rectiligne placé à un angle d'attaque nul; le jet de soufflage, sortant d'une fente à l'intrados du profil avec l'orientation Θ , est supposé conserver la forme d'un filet fluide très mince qui s'étend jusqu'à l'infini aval (*fig. 44*). Il est raisonnable, dans ce cas, de prévoir la présence d'un sillage derrière le jet. Pour l'analyse théorique on peut adopter le schéma d'HELMHOLTZ d'un sillage de fluide mort, limité d'un côté par le jet mince et de l'autre par la ligne de courant libre issue du bord de fuite du profil d'aile. L'écoulement est défini par son potentiel des vitesses de perturbation $\varphi(x, y)$, la vitesse V_0 à l'infini étant prise comme vitesse de référence, les conditions aux limites pour $\varphi(x, y)$ sont alors les suivantes :

a) sur les parties OF et Of du profil plan, la condition de glissement s'écrit $\varphi'_y = 0$;

b) au bord de fuite F, la pression est égale à celle régnant dans le sillage de fluide mort, c'est-à-dire à la pression p_0 à l'infini, donc $(\varphi'_x)_F = 0$;

c) sur la partie FI de l'axe Ox, qui correspond à la projection de la ligne de courant limitant le sillage, la pression est constante et égale à p_0 , la formule de

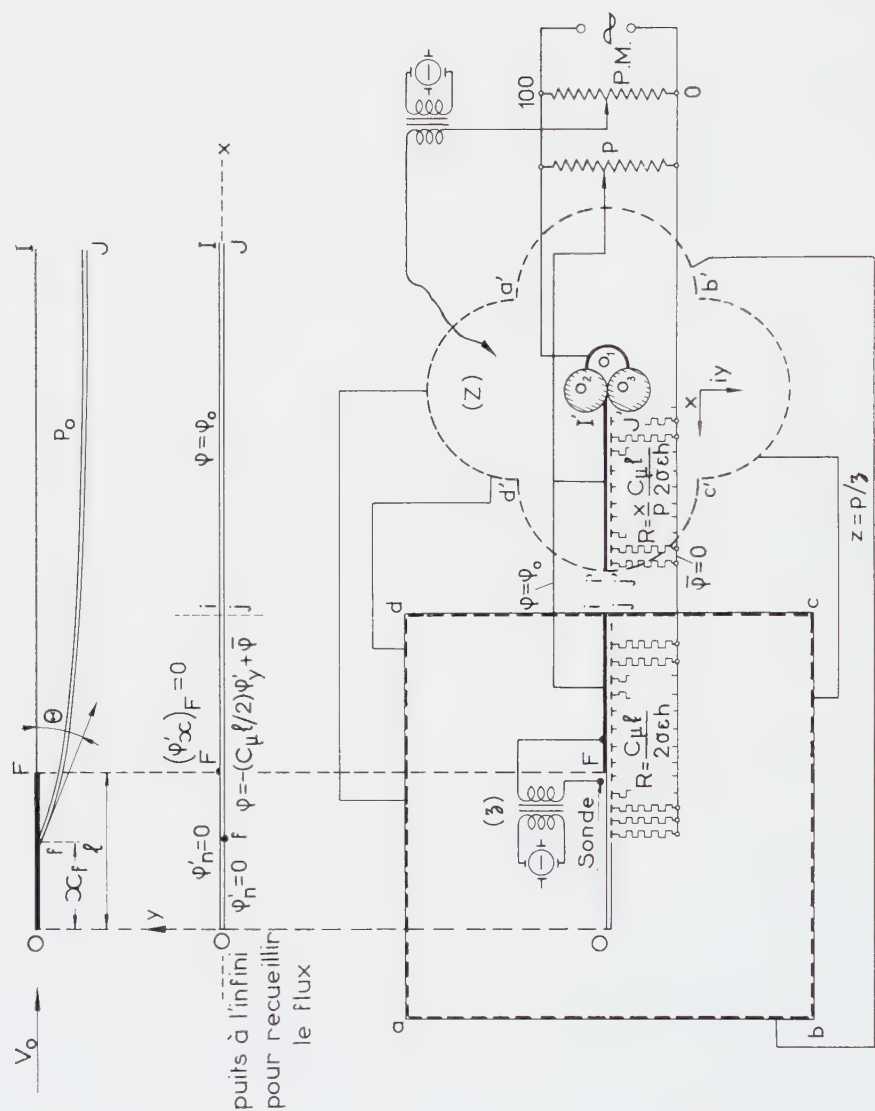


Fig. 44

BERNOULLI linéarisée donne ainsi $\varphi'_x = 0$, c'est-à-dire que sur FI le potentiel φ est constant, désignons par φ_0 cette constante;

d) sur Fj, projection du jet mince, la condition d'équilibre du filet fluide donne :

$$(1) \quad p - p_0 = \frac{Q_j V_j}{\mathfrak{R}},$$

où Q_j est le débit du jet par unité de longueur de la fente, V_j est sa vitesse d'éjection, p est la pression de l'écoulement en bordure du jet et $\mathfrak{R}$ le rayon courbure de celui-ci.

On a $\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\varphi''_{y,x}}{V_0}$, d'où :

$$(2) \quad \varphi V_0 \varphi'_x = \frac{Q_j V_j}{V_0} \varphi''_{xy}.$$

En intégrant par rapport à x et en introduisant le coefficient de quantité de mouvement $C_\mu = \frac{2 Q_j V_j}{\varphi V_0^2 l}$, on obtient :

$$(3) \quad \varphi = -\frac{C_\mu l}{2} \varphi'_y + \varphi.$$

A l'infini aval φ'_y tend vers zéro et φ tend vers $\bar{\varphi}$; à la sortie du jet, en désignant par Θ l'angle de soufflage, on a :

$$(4) \quad \varphi_f = \frac{C_\mu l}{2} V_0 \Theta + \varphi.$$

e) du fait de l'existence d'un sillage étendu jusqu'à l'infini aval, la dérivée normale de φ le long de la coupure IFOJ a une valeur positive, comme si cette coupure correspondait à une distribution de sources, il y a donc un flux, ce flux doit être absorbé par un puits à l'infini.

3

RÉSOLUTION ANALOGIQUE DU PROBLÈME

3,1 Montage électrique.

La détermination du potentiel $\varphi(x, y)$ a été effectuée par la méthode d'analogie rhéoelectrique en identifiant la fonction harmonique φ au potentiel électrique d'une cuve à fond plan. Pour représenter le champ illimité de φ avec une singularité correspondant au puits à l'infini, nous sommes conduits à utiliser les cuves associées par inversion [20], [13]. La *figure 44* représente le montage électrique. La cuve *abcd* représente une partie du plan $z = x + iy$. La transformation $Z = \frac{\varphi}{z}$ ramène la région extérieure à *abcd* du plan z à une région limitée par quatre arcs de demi-cercle *a'b'*, *b'e'*, *c'd'* et *d'a'* du plan $Z = X + iY$; cette région est représentée par une autre cuve. Les points correspondants sur les frontières des deux cuves sont reliés électriquement,

ils ont ainsi la même valeur de φ . La coupure $iFOff$ est formée par une plaque en plexiglass; les parties OF et Of sont isolantes d'après a); la partie Fi est recouverte par électrode portée au potentiel φ_0 d'après c); la partie ff est recouverte de petites électrodes de largeur ε et de hauteur h , ces électrodes sont alimentées à partir du potentiel $\bar{\varphi} = 0$ à travers des résistances r . En remplaçant $-\varphi'_y$ par $\frac{(\varphi - \bar{\varphi})}{r\sigma\varepsilon h}$ la condition (3) s'écrit :

$$(5) \quad \varphi = \frac{C_\mu l}{2} \frac{1}{\sigma\varepsilon h} \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{r} + \bar{\varphi}.$$

En prenant $r = \frac{C_\mu l}{2\sigma\varepsilon h}$, cette condition est satisfaite automatiquement.

Dans la cuve du plan Z , le segment OX est formé par une plaque portant les transformées $i'I'$ et $j'J'$ des iI et jJ . La partie $i'I'$ est constituée par une électrode portée au potentiel φ_0 d'après c). La condition (3) transformée dans le plan Z pour la partie $j'J'$ devient :

$$(6) \quad \varphi = \frac{C_\mu l}{2} \frac{X^2}{\mathfrak{L}} \varphi'_X + \bar{\varphi},$$

où X désigne l'abscisse du point considéré; la puissance de transformation $\mathfrak{L}$ est égale à 170 392 mm² pour les cuves associées utilisées. La partie $j'J'$ est recouverte de petites électrodes de largeur ε et de hauteur h , ces électrodes sont alimentées à partir du potentiel $\bar{\varphi} = 0$ à travers des résistances r . Si l'on écrit la condition (6) sous la

forme suivante, en remplaçant φ'_X par $\frac{\varphi - \bar{\varphi}}{r\sigma\varepsilon h}$,

$$(7) \quad \varphi = \frac{C_\mu l}{2} \frac{X^2}{\mathfrak{L}} \frac{1}{\sigma\varepsilon h} \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{r} + \bar{\varphi},$$

on voit que la valeur des résistances doit être fixée par $r = \frac{X^2 C_\mu l}{2\mathfrak{L}\sigma\varepsilon h}$ pour que cette condition soit assurée.

Au point $Z = 0$ qui correspond à l'infini du plan z , il y a une singularité d'après e), on la matérialise par un arc de cercle conducteur O_1 porté au potentiel maximal, ce cercle conducteur est séparé des électrodes de $j'J'$ et de $i'I'$ par deux arcs de cercles isolants O_2 et O_3 , la singularité du type puits permet de recueillir le flux traversant les électrodes dans ff et $j'J'$ et les électrodes Fi et $i'I'$.

Pour assurer la condition b), une sonde est placée dans le voisinage immédiat en amont du point F ; entre la sonde et l'électrode Fi (ainsi que l'électrode $i'I'$) est branché l'indicateur de zéro; on règle φ_0 au moyen d'un potentiomètre P de façon à assurer l'égalité de potentiel entre la sonde et les électrodes Fi et $i'I'$, on a donc $(\varphi'_x)_F = 0$.

Enfin, signalons que, pour chaque expérience, il faut toujours assurer l'égalité de la valeur du produit σh dans les deux cuves; en général, la conductivité de l'eau dans les deux cuves n'est pas identique, il est donc nécessaire de régler les hauteurs pour maintenir le produit σh à une valeur bien déterminée.

3,2 Calcul des coefficients aérodynamiques.

a) Coefficient de portance.

Le coefficient de portance est calculé comme suivant :

$$\begin{aligned} C_Z &= \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 l} \left[\int_0^f (p - p_0) dx - \int_0^F (p - p_0) dx + Q_j V_j \Theta \right], \\ &= \frac{2}{\rho V_0^2 l} \left[-\rho V_0 \int_0^f \varphi'_x dx + \rho V_0 \int_0^F \varphi'_x dx + Q_j V_j \Theta \right], \\ C_Z &= \frac{2}{V_0 l} (\varphi_F - \varphi_f) + C_\mu \Theta. \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (4), on peut déduire :

$$(8) \quad \frac{C_Z}{\Theta} = C_\mu \frac{\varphi_F - \bar{\varphi}}{\varphi_f - \bar{\varphi}}.$$

b) Coefficient de moment par rapport au bord d'attaque.

Le coefficient de moment est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} C_M &= \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 l^2} \left[\int_0^f x (p - p_0) dx - \int_0^F x (p - p_0) dx + x_f Q_j V_j \Theta \right], \\ &= \frac{2}{\rho V_0^2 l^2} \left[-\rho V_0 \int_0^f x \varphi'_x dx + \rho V_0 \int_0^F x \varphi'_x dx + x_f Q_j V_j \Theta \right], \\ &= \frac{2}{V_0 l^2} \left[l \varphi_F - x_f \varphi_f + \int_0^f \varphi dx - \int_0^F \varphi dx \right] + \frac{x_f}{l} C_\mu \Theta. \end{aligned}$$

Compte tenu des relations (4) et (8), on déduit :

$$(9) \quad \frac{C_M}{\Theta} = \frac{C_Z}{\Theta} + \frac{C_\mu}{l} \frac{\int_0^f \varphi dx - \int_0^F \varphi dx}{\varphi_f - \bar{\varphi}}.$$

c) Centre de portance.

Le centre de portance $\frac{x_p}{l}$ est donné par :

$$(10) \quad \frac{x_p}{l} = \frac{\frac{C_M}{\Theta}}{\frac{C_Z}{\Theta}}.$$

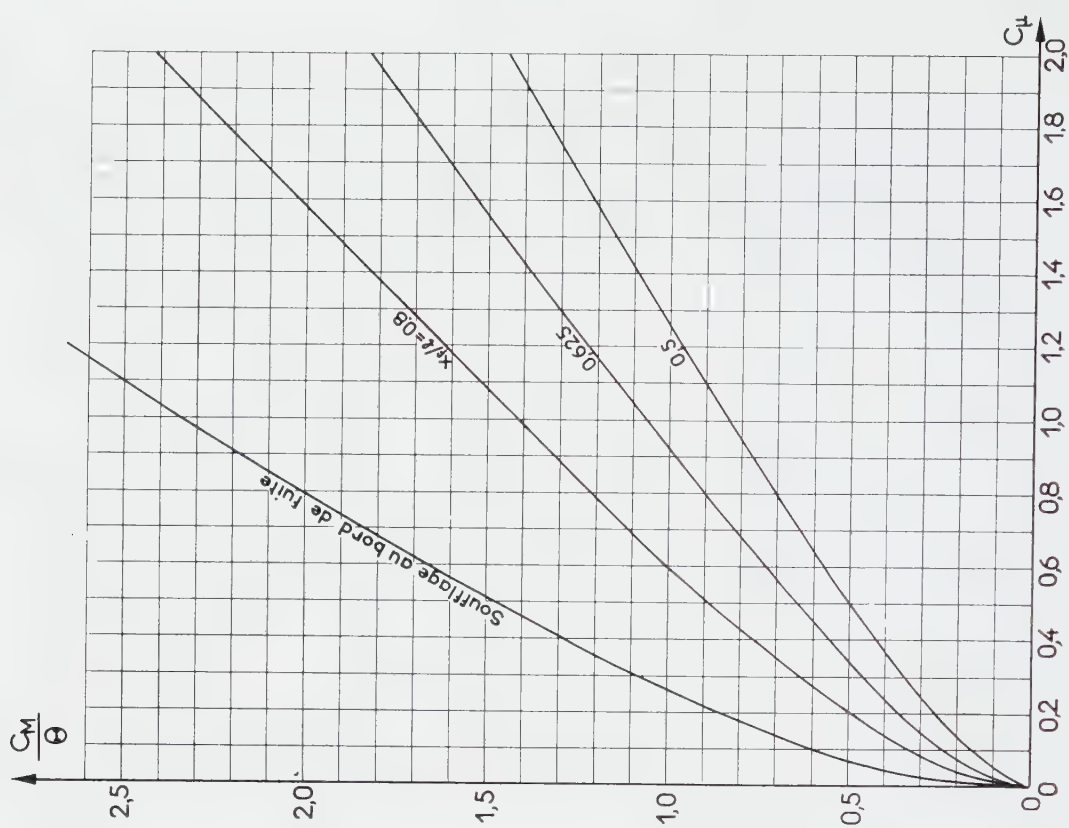


Fig. 46

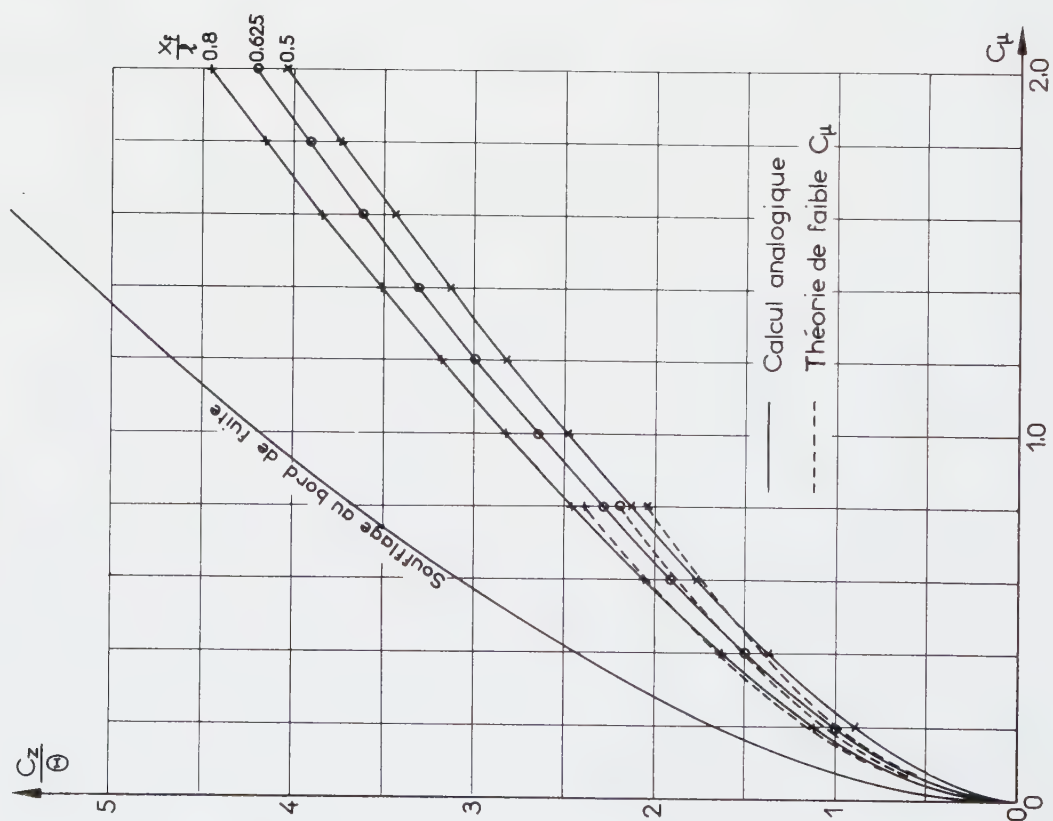


Fig. 45

d) Coefficient de la pression locale.

D'après la formule de BERNOULLI linéarisée, le coefficient de la pression locale est donné par $C_p = -2 \varphi'_x / V_0$ et, compte tenu de la relation (4), on obtient :

$$(11) \quad \frac{C_p}{(\Theta)} = - \frac{C_\mu l}{\varphi_r - \varphi} \varphi'_x.$$

Ces formules permettent d'évaluer $\frac{C_z}{(\Theta)}$, $\frac{C_m}{(\Theta)}$, $\frac{x_p}{l}$, $\frac{C_p}{(\Theta)}$ et $\frac{\Delta C_p}{(\Theta)}$ à partir des mesures effectuées dans la cuve.

4

RÉSULTATS

Les calculs analogiques ont été effectués pour différentes valeurs de C_μ : $0 < C_\mu < 2$, et pour trois positions de l'origine du jet : $\frac{x_f}{l}$ égal à 0,5; 0,625 et 0,8. Les résultats sont donnés sur les figures :

- figure 45 : variation de $\frac{C_z}{(\Theta)}$ en fonction de C_μ ;
- figure 46 : variation du $\frac{C_m}{(\Theta)}$ en fonction de C_μ ;
- figure 47 : position du centre de portance en fonction de C_μ ;

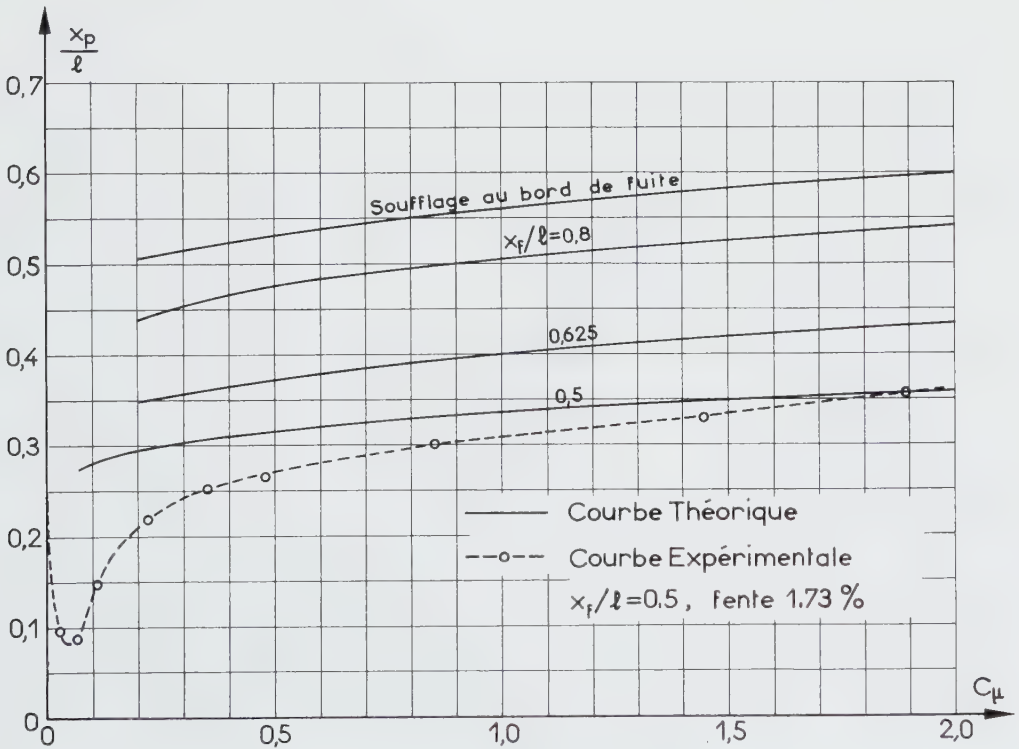


Fig. 47

— figures 48 et 49 : les répartitions de $\frac{C_p}{\Theta}$ et $\frac{\Delta C_p}{\Theta}$ le long du profil pour différentes valeurs de C_μ .

Les résultats du soufflage « singulier » au bord de fuite ont été reportés sur les figures 45, 46 et 47 pour comparaison. Le coefficient de portance C_z diminue

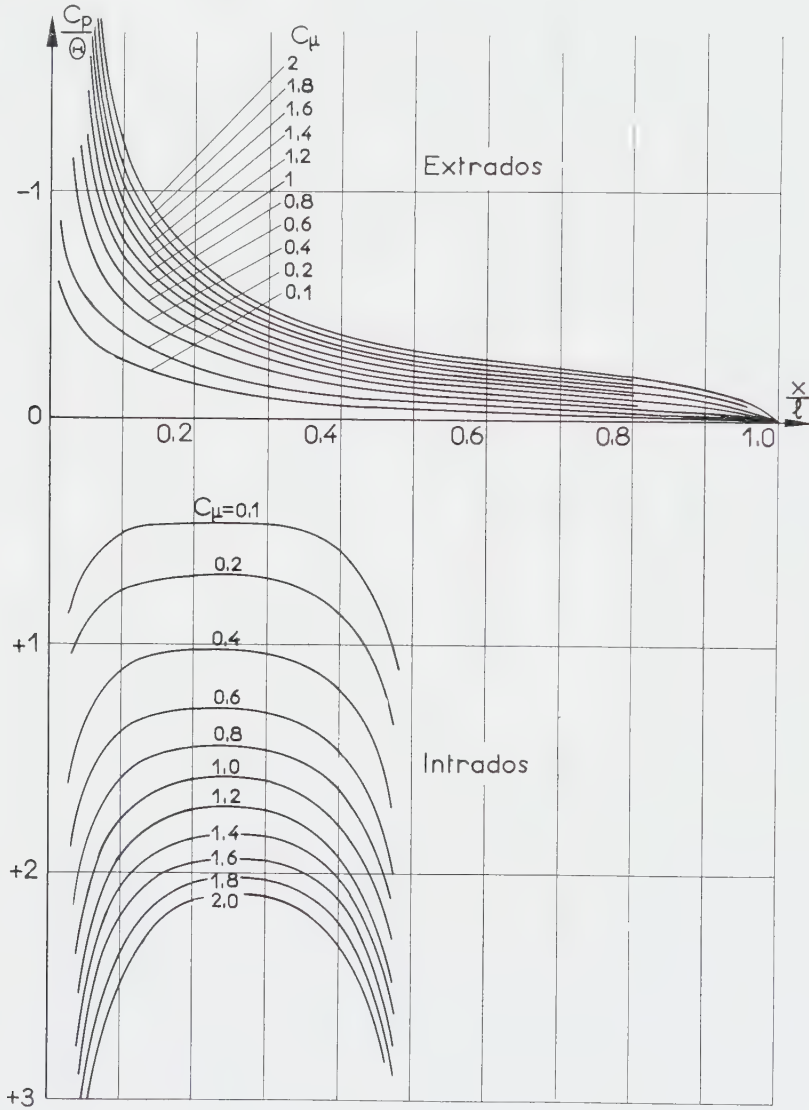


Fig. 48

lorsqu'on éloigne la sortie du jet du bord de fuite. Pour la portance, le soufflage à l'intrados est nettement moins avantageux que le soufflage au bord de fuite. Par contre, le moment piqueur est diminué : pour la fente de soufflage placée au milieu du profil ($\frac{x_f}{l} = 0,5$) le recul du centre de poussée demeure assez faible ($\frac{x_p}{l} = 0,36$ pour $C_\mu = 2$).

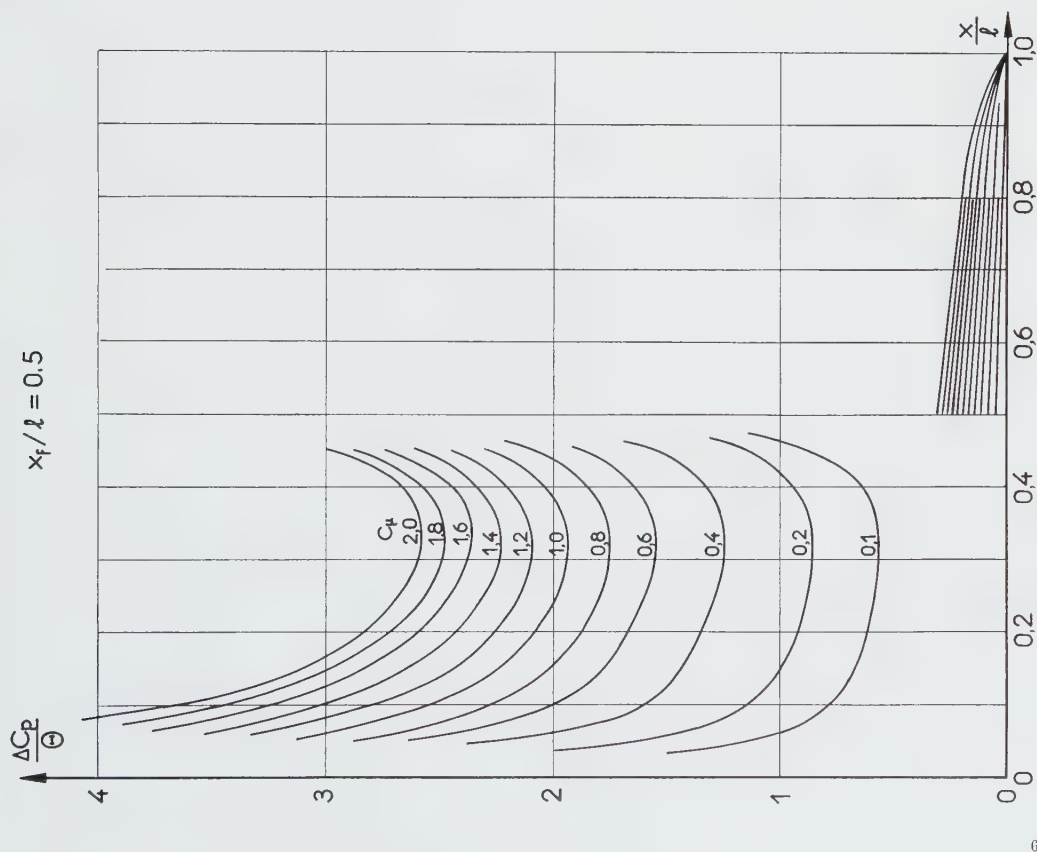


Fig. 49

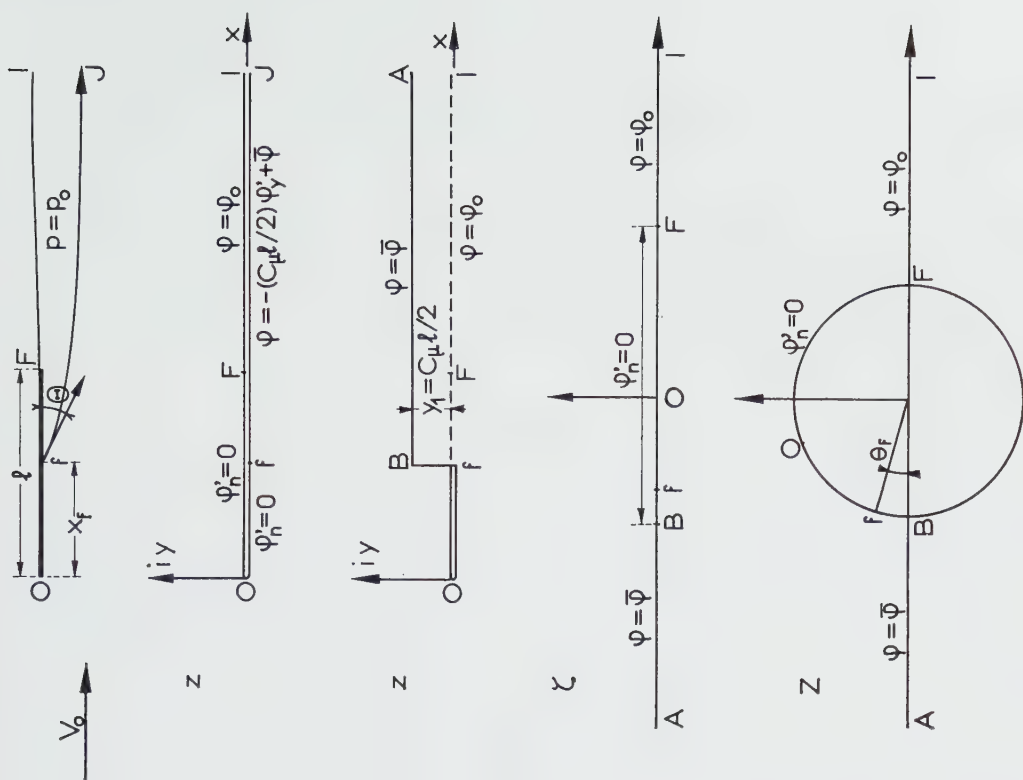


Fig. 50

5

CALCUL ANALYTIQUE POUR LES FAIBLES C_μ

Pour de faibles valeurs de C_μ il est légitime de faire une approximation sur le modèle du calcul analogique : on peut imaginer que les résistances r , nécessaires pour alimenter les électrodes dans la partie fI , sont constituées par l'électrolyte lui-même en faisant un décrochement fBA (surface de RIEMANN) dont la longueur fB est fixée à $\frac{C_\mu l}{2}$ (fig. 50). Les conditions aux limites pour la fonction φ se résument comme suit :

- a) sur OF , Of et fB , la dérivée normale de φ est nulle;
- b) le point F est un point d'arrêt : $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$;
- c) sur FI , $\varphi = \varphi_0$;
- d) sur AB , $\varphi = \bar{\varphi}$;
- e) à l'infini, φ tend vers la partie réelle de la fonction analytique suivante :

$$(12) \quad \varphi \rightarrow \Re \left[-i\mathfrak{A} \sqrt{z} + i \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{2} \log z + \varphi_0 \right],$$

où $\mathfrak{A}$ est une constante. Le premier terme du second membre correspond au sillage indéfini, le second terme est dû à la circulation. La transformation de SCHWARZ :

$$(13) \quad \frac{dz}{d\zeta} = K (\zeta - \zeta_B)^{-1/2} (\zeta + 1)^{1/2}$$

permet de passer le domaine limité par $ABfOFI$ du plan z du demi-plan supérieur de ζ . Les points A , B , f , O , F et I sont représentés par $-\infty$, ζ_B , -1 , 0 , ζ_F et $+\infty$ sur l'axe réel du plan ζ . Par le changement de variable :

$$(14) \quad \zeta = - \left(\frac{\zeta_B + t^2}{t^2 - 1} \right),$$

on peut intégrer l'équation (13), et on obtient :

$$(15) \quad z = 2K(\zeta_B + 1) \left[\frac{(\zeta_B + 1)}{16} \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{(1-3\zeta_B)}{16} \frac{1}{(t-1)} + \frac{(1-3\zeta_B)}{16} \log(t-1) - \frac{\zeta_B + 1}{16} \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{(1-3\zeta_B)}{16} \frac{1}{(t-1)} - \frac{(1-3\zeta_B)}{16} \log(t+1) \right] + x_f.$$

En exprimant que $t = 0$ ($\zeta = \zeta_B$) correspondant au $z = x_f + iC_\mu l/2$ et $t = \sqrt{-\zeta_B}$ ($\zeta = 0$) correspondant à $z = 0$, on peut déduire :

$$(16) \quad \zeta_B = - \left(1 + \frac{C_\mu l}{4\pi x_f} \right)^2$$

et :

$$(17) \quad K = 2x_f.$$

Comme ζ_B est très proche de -1 quand la valeur de C_μ est faible, on a posé $\zeta_B = -(1 + \varepsilon)^2$ et on a négligé les termes infiniment petits d'ordre supérieur à 0 (ε^2) au cours du calcul précédent.

La position de ζ_F est fixée en admettant que C_μ est égal à zéro, on trouve :

$$(18) \quad \zeta_F = \sqrt{\frac{l}{x_f}}.$$

Cette approximation n'introduit pas d'erreurs appréciables tant que les C_μ considérés sont faibles. Ensuite, la transformation :

$$(19) \quad \zeta = \frac{\zeta_F + \zeta_B}{2} = \frac{\zeta_F - \zeta_B}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)$$

permet de passer du plan ζ au plan Z ; le segment B/OF du plan ζ est représenté dans le plan Z par le demi-cercle B/OF dont le rayon est égal à l'unité. On est ainsi amené à déterminer la fonction $\varphi(Z)$ avec les conditions aux limites indiquées sur la figure 50. Quand Z tend vers infini, la forme asymptotique de $\varphi(Z)$ doit être :

$$(20) \quad \varphi \rightarrow R \left[-i\vartheta Z + \frac{i(\varphi_0 - \bar{\varphi})}{\pi} \log Z + \varphi_0 \right],$$

où ϑ est une constante. La fonction $\varphi(Z)$ a pour expression :

$$(21) \quad \varphi = R \left[-i\vartheta \left(Z - \frac{1}{Z} \right) + \frac{i(\varphi_0 - \bar{\varphi})}{\pi} \log Z + \varphi_0 \right].$$

En exprimant que $Z_F = 1$ est au point d'arrêt, on peut déterminer la constante :

$$(22) \quad \vartheta = \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{2\pi}.$$

Au point $Z_f = e^{i(\pi - \theta_f)}$, la valeur de θ_f peut être déduite à partir de l'équation (19); compte tenu des valeurs de ζ_f , ζ_B et ζ_F , et négligeant les termes infiniment petits d'ordre supérieur à 0 (θ_f^2) puisque θ_f est petit, on trouve :

$$(23) \quad \theta_f = 2 \sqrt{\frac{C_\mu}{2\pi \left(\sqrt{\frac{x_f}{l}} + \frac{x_f}{l} \right) + C_\mu}}.$$

La valeur de φ_f au point Z_f est calculée d'après (21); en négligeant les termes infiniment petits d'ordre supérieur à 0 (θ_f^2), on a :

$$(24) \quad \varphi_f - \bar{\varphi} = 2 \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{\pi} \theta_f = 4 \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{\pi} \sqrt{\frac{C_\mu}{2\pi \left(\sqrt{\frac{x_f}{l}} + \frac{x_f}{l} \right) + C_\mu}}.$$

Rappelons que le coefficient de portance du profil est donné par l'expression (8) qui s'écrit :

$$\frac{C_z}{\pi} = C_\mu \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}}{\varphi_f - \bar{\varphi}}.$$

En éliminant $\varphi_f - \varphi$ par l'équation (24), on obtient la formule suivante :

$$(25) \quad \frac{C_z}{\Theta} = \frac{\pi}{4} \sqrt{C_\mu} \sqrt{2\pi \left(\sqrt{\frac{x_f}{l}} + \frac{x_f}{l} \right) + C_\mu}.$$

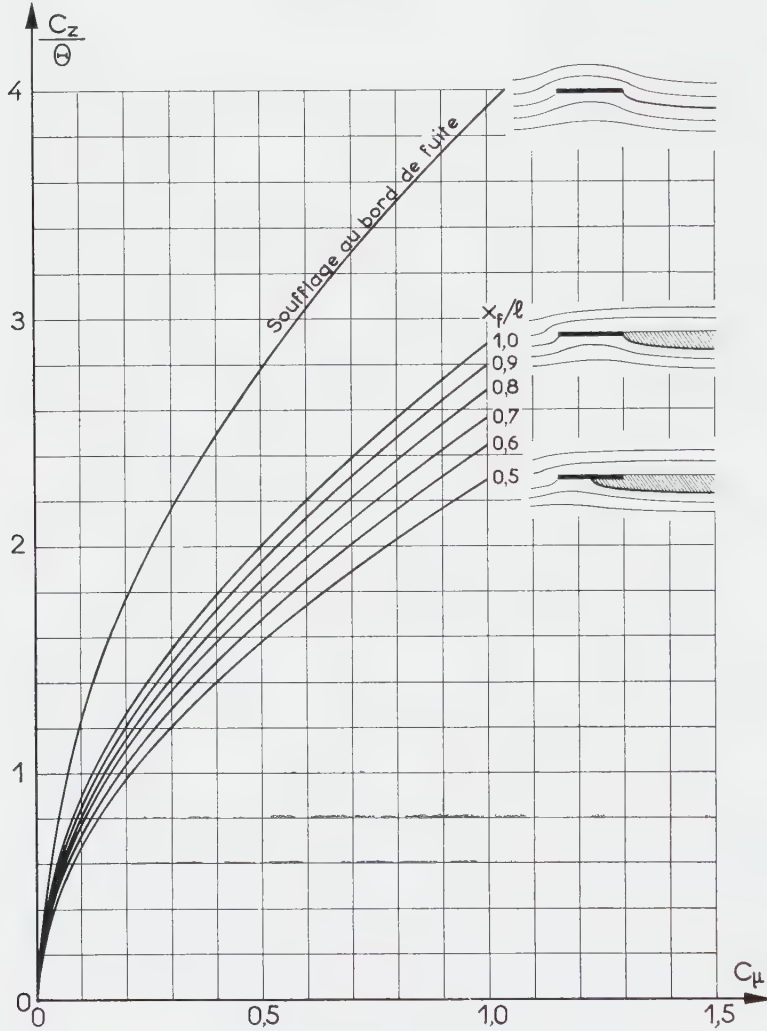


Fig. 51

La figure 51 représente la variation de $\frac{C_z}{\Theta}$ en fonction de C_μ déduite de cette formule. Ce calcul d'approximation est en accord avec le calcul analogique tant que C_μ n'excède pas 0,75 (fig. 45).

La courbe $\frac{x_f}{l} = 1$, de la figure 51, correspond au cas de la fente placée au bord de fuite, mais avec présence d'un sillage de fluide mort à l'arrière du profil. Cette courbe est à comparer à celle du soufflage « singulier » lorsque l'écoulement contourne le bord de fuite [7]. (Même calcul approximatif pour les faibles C_μ .)

6

CONFRONTATION THÉORIE-EXPÉRIENCE

L'étude expérimentale du soufflage à l'intrados a été effectuée avec un profil symétrique NACA 63₂ 015 par A. REBOURS [19].

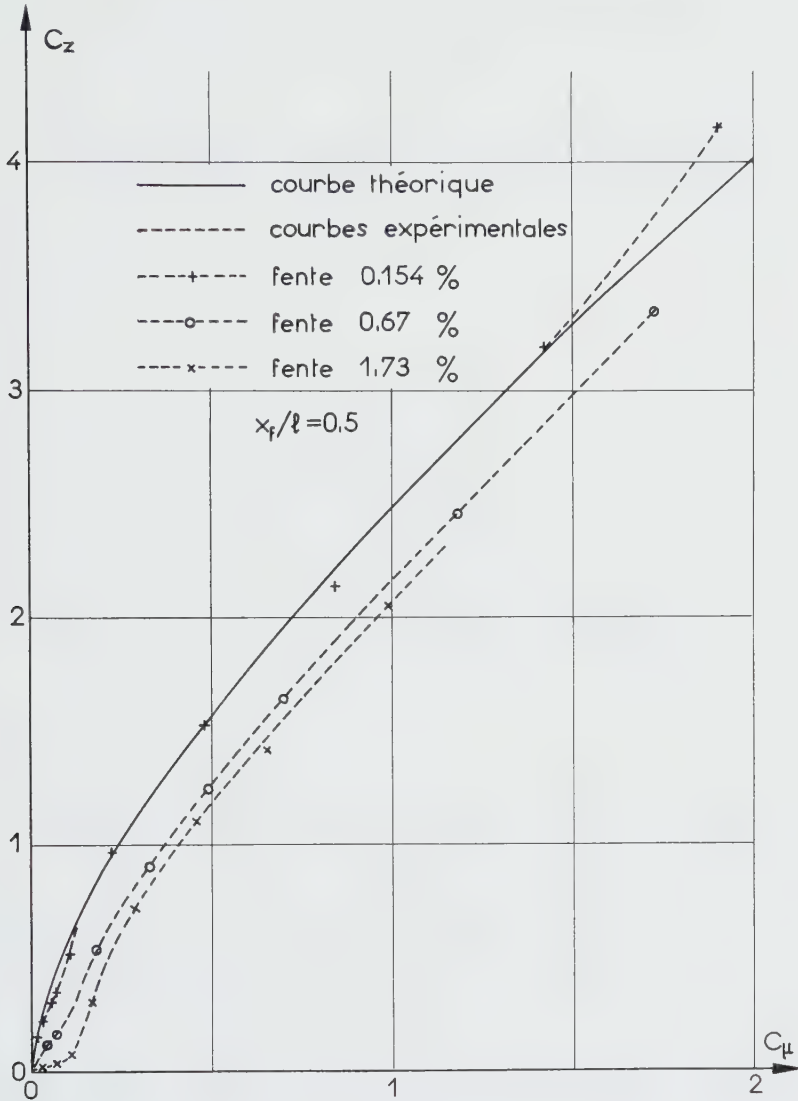


Fig. 52

Les résultats expérimentaux ont montré que lorsqu'on effectuait un soufflage au milieu de l'intrados ($\frac{x_f}{l} = 0,5$), l'influence du jet était tout à fait différente suivant que l'orientation de la fente de sortie était faible ou élevée. Pour une fente à 45° le jet colle à la paroi en provoquant un effet d'aspiration sur l'écoulement. A l'incidence nulle la portance correspondante est alors *négative*. Pour une fente orientée à 90°

on obtient, au contraire, une portance *positive* d'autant plus importante que le C_{μ} est grand.

Le soufflage d'intrados à 90° est donc le plus intéressant; nous limiterons donc la confrontation théorie-expérience aux résultats correspondant à ce cas, en remplaçant Θ , qui figure dans les résultats théoriques, par $\sin \Theta$ ($= \sin 90^{\circ} = 1$).

Sur le coefficient de portance C_z , l'accord est très satisfaisant entre la courbe théorique et les valeurs expérimentales données par la fente de largeur relative $\frac{s}{l} = 1,73 \%$ (fig. 52). La largeur de la fente a une certaine influence et il semble qu'aux faibles C_{μ} l'action de jet ne devienne efficace que si son épaisseur est suffisante. Un jet émis à faible vitesse, et trop mince, n'a presque pas d'effet sur l'écoulement (cas

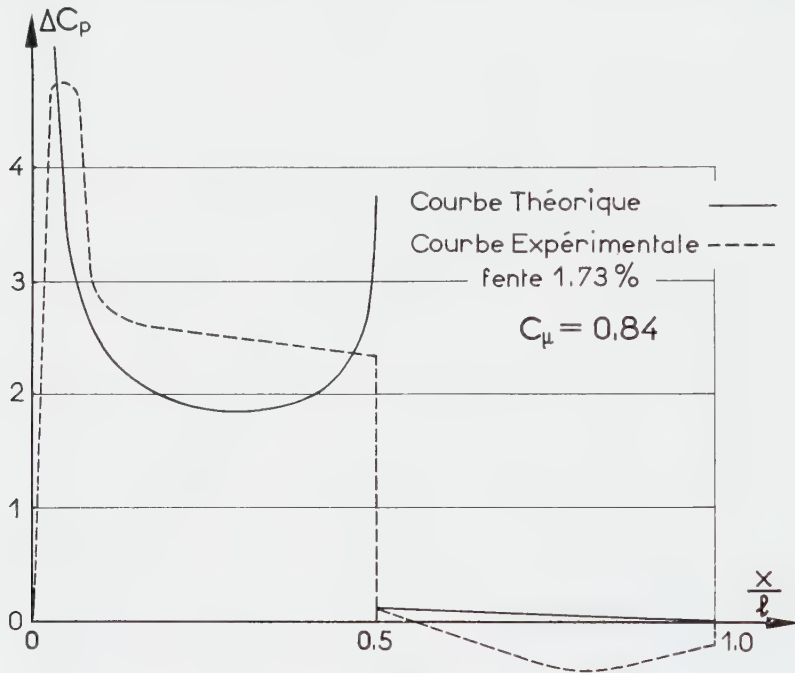


Fig. 53

de la fente très étroite de $\frac{s}{l} = 0,15 \%$ à $C_{\mu} < 0,1$). Le décalage des courbes traduit nettement ce phénomène.

La figure 53 représente la comparaison des répartitions de charge théorique et expérimentale pour $C_{\mu} = 0,84$. Les valeurs négatives de la courbe expérimentale sont dues à la présence d'une dépression plus élevée à l'intrados qu'à l'extrados, en aval du point de soufflage.

La comparaison concernant les moments est moins bonne comme l'indique le rapprochement des courbes théorique et expérimentale de l'évolution du centre de portance en fonction de C_{μ} (fig. 47). La théorie représente mal la naissance de la zone de dépression derrière le jet aux faibles C_{μ} ; par contre, lorsque le sillage est complètement développé (C_{μ} grands), la confrontation des centres de poussée est meilleure.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS AUTOUR DE PROFILS AVEC CAVITATION

INTRODUCTION

L'augmentation de la vitesse des navires et des sous-marins a rendu particulièrement importantes les recherches théoriques et expérimentales sur les écoulements avec cavitation. Pour étudier ces phénomènes, M. P. TULIN et M. P. BURKART [25], [26], [27] ont développé, au cours de ces dernières années, une intéressante théorie linéarisée dont les résultats correspondent, comme ces auteurs l'ont montré, sur quelques cas particuliers aux termes du premier ordre des solutions rigoureuses. Il paraît avantageux, dans ces conditions, d'exploiter cette théorie, dont la mise en œuvre est relativement plus simple, pour définir les écoulements peu perturbés qui s'établissent autour des profils minces et des corps élancés lorsque se produisent des poches de cavitation.

Les principes de cette méthode sont très voisins de ceux de la théorie classique des profils minces en aérodynamique; comme dans ce dernier domaine le calcul d'analogie rhéoelectrique s'est révélé être un mode de résolution parmi les plus commodes et les plus efficaces, il nous a paru intéressant d'appliquer cette méthode de calcul pour traiter les écoulements linéarisés avec cavitation. D'ailleurs, même avec cette approximation, la recherche des solutions analytiques se heurte à de sérieuses difficultés dès que les profils donnés sont de formes quelconques et que le nombre de cavitation est différent de zéro. Pour ce seul motif le développement d'une méthode analogique méritait d'être tenté.

Les résultats présentés dans ce chapitre ne concernent que des écoulements plans; les travaux correspondants étaient destinés à définir et mettre au point le modèle analogique afin de juger de sa précision. Au cours de cette étude nous avons ainsi pu obtenir la solution analytique de l'effet d'un braquage de volet pour un nombre de cavitation quelconque; solution qui a permis d'établir d'utiles comparaisons avec les résultats fournis par le calcul analogique.

Dès à présent, il peut être utile de signaler que le développement de la méthode analogique décrite dans ce chapitre paraît susceptible d'atteindre certaines solutions d'écoulements autour d'obstacles tridimensionnels supercavitants.

2 VITESSES DE PERTURBATION. CONDITIONS AUX LIMITES

Considérons un profil mince placé dans un écoulement permanent et irrotationnel d'un liquide incompressible animé d'une vitesse uniforme V_0 à l'infini (fig. 54). On admet qu'une poche de cavitation se produit à partir du bord d'attaque quand la vitesse V_0 est suffisamment grande pour que la dépression à l'extrados atteigne la

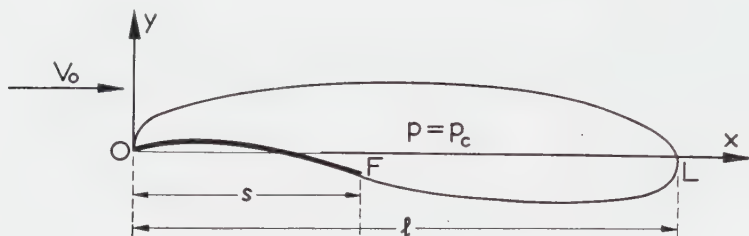


Fig. 54 a

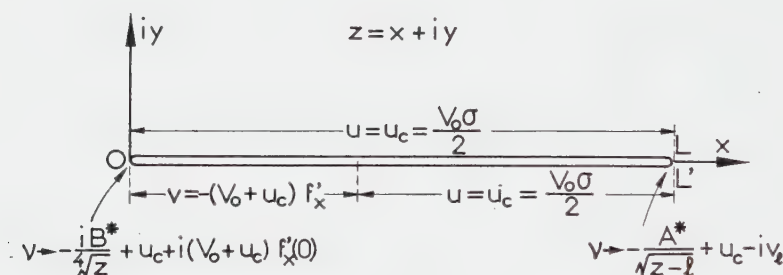


Fig. 54 b

tension de vapeur liquide, soit p_c cette pression dans la poche de cavitation, on définit le nombre de cavitation σ par :

$$(1) \quad \sigma = \frac{p_0 - p_c}{\frac{1}{2} \rho V_0^2},$$

où p_0 désigne la pression statique de l'écoulement à l'infini. Désignons par $v = u - iv$ la vitesse complexe de l'écoulement de perturbation : c'est une fonction analytique, dans le plan $z = x + iy$, régie par les conditions aux limites suivantes :

— à l'infini du plan z , v tend vers zéro ;

— dans la poche de cavitation, $p = p_c$, et compte tenu de la formule de BERNOULLI linéarisée, on a donc, sur les projections des lignes de courant OL et FL' :

$$(2) \quad u = u_c = \frac{p_0 - p_c}{\rho V_0} = \frac{V_0 \sigma}{2};$$

— si la forme du profil OF est définie par $y = f(x)$, sur sa projection, la condition de glissement du fluide peut s'écrire :

$$(3) \quad \frac{v}{V_0 + u_c} = f'_x(x),$$

en tenant compte, au dénominateur du premier membre, de la vitesse de perturbation u_c , comme l'a préconisé TULIN. L'introduction du terme $(V_0 + u_c)$, au lieu du seul terme classique V_0 , semble rendre mieux compte des résultats expérimentaux qui indiquent que sur le profil la vitesse est bien proportionnelle à la somme $(V_0 + u_c)$. Dans la suite, nous donnerons d'ailleurs quelques renseignements sur la comparaison des résultats que l'on obtient, suivant que l'on néglige ou pas la vitesse u_c ;

— à l'extrémité L (ou L') de la poche de cavitation, u est évidemment encore égal à u_c tandis que v tend vers plus l'infini à l'intrados et v tend vers moins l'infini à l'extrados : cette propriété indique qu'au voisinage du point L la fonction ν est représentée par :

$$(4) \quad \nu \rightarrow -\frac{A^*}{\sqrt{z-l}} + u_l - iv_l,$$

où le premier terme correspond à une singularité du type $-\frac{1}{\sqrt{z}}$, dont l'image est donnée sur la *figure 55 a*, et $(u_l - iv_l)$ représente la partie finie de la fonction ν , soit $u_l = \frac{V_0 \sigma}{2} = u_c$.

Au bord d'attaque O, la composante v est égale à $(V_0 + u_c) f'_x(O)$ à l'intrados et tend vers l'infini immédiatement à l'extrados, tandis que la composante u est égale à u_c à l'extrados et tend vers $-\infty$ immédiatement à l'intrados, il en résulte qu'au voisinage du bord d'attaque la fonction s'écrit :

$$(5) \quad \nu \rightarrow -\frac{iB^*}{\sqrt[4]{z}} + u_0 - iv_0,$$

où le premier terme correspond à une singularité du type $-\frac{i}{\sqrt[4]{z}}$ dont l'image est donnée sur la *figure 56 a*, et $(u_0 - iv_0)$ représente la partie finie de la fonction ν au point O, soient $u_0 = \frac{V_0 \sigma}{2}$ et $v_0 = (V_0 + u_c) f'_x(O)$.

3 PROFIL RECTILIGNE ET EFFET DE VOLET RÉSOLUTION ANALYTIQUE

TULIN a traité l'écoulement autour d'un profil plan placé à une incidence α avec un nombre de cavitation σ non nul [27], TULIN et BURKART ont également traité l'effet du volet lorsque $\sigma = 0$ [26], mais, à notre connaissance, le cas plus général de l'effet de volet pour une valeur quelconque de σ n'a fait l'objet d'aucune publication. Nous donnerons dans ce paragraphe une solution analytique de ce problème. Ce même type d'écoulement sera d'ailleurs déterminé, dans la suite, par le

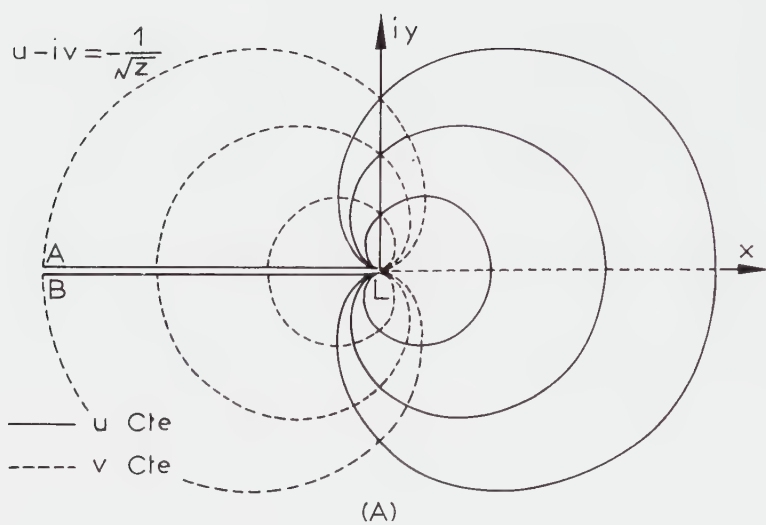


Fig. 55 a

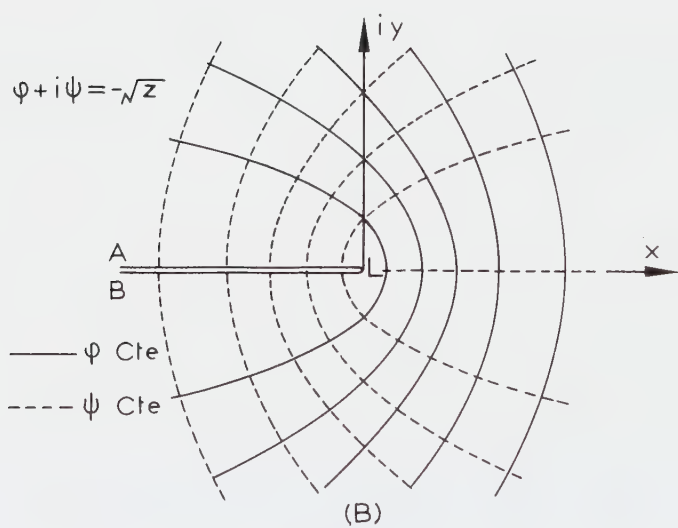


Fig. 55 b

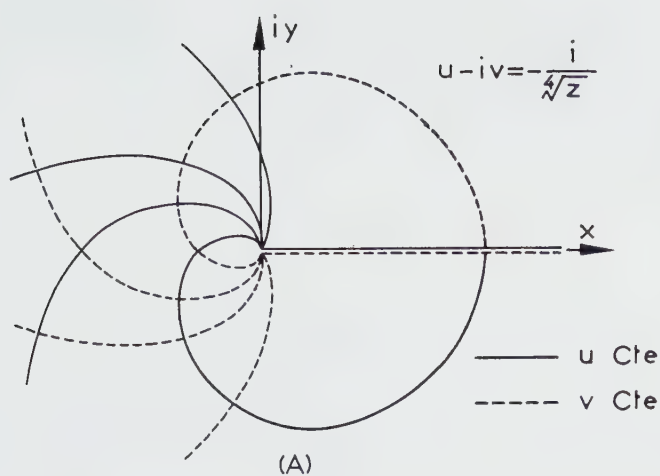


Fig. 56 a

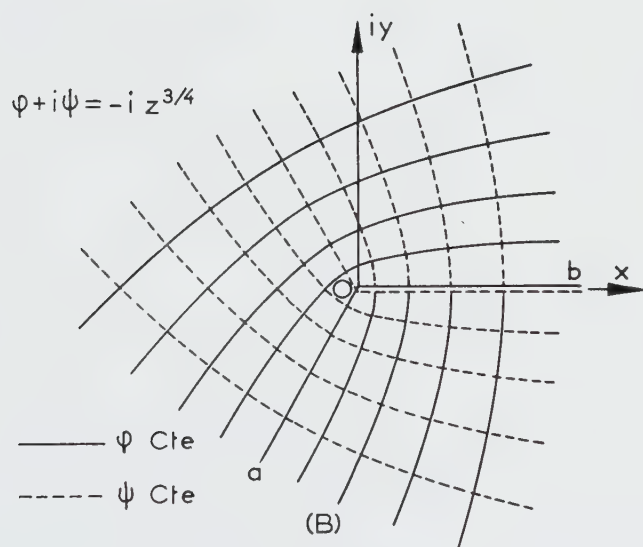


Fig. 56 b

calcul analogique comme exemple d'application de cette méthode; et la confrontation des résultats obtenus permettra de juger de la précision du calcul analogique.

La *figure 57 a* représente l'écoulement autour d'un profil plan muni d'un volet rectiligne, la partie ON du profil est parallèle à la vitesse V_0 , le volet est braqué à un angle β et la position du volet est caractérisée par la valeur de $\frac{x_N}{s}$. Les conditions aux limites qui définissent la fonction v sont indiquées sur la *figure 57 b*.

La transformation conforme :

$$(6) \quad Z = -ia \sqrt{\frac{z}{z-l}},$$

avec :

$$(7) \quad a = \sqrt{\frac{l-s}{s}},$$

fait passer du plan z au demi-plan inférieur de plan complexe Z ; l'infini du plan z est représenté par le point $-ia$ du plan Z (*fig. 57 c*). Par une transformation de JOUKOWSKY :

$$(8) \quad Z - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right),$$

le plan Z correspond au nouveau plan λ . Dans ce plan λ la fonction v est régie par les conditions aux limites indiquées sur la *figure 57 d*; de plus, on peut montrer qu'au voisinage du point $\lambda = -1$, on a :

$$(9) \quad v \rightarrow \frac{i\vartheta\beta}{\lambda + 1},$$

et pour $\lambda \rightarrow \infty$, on a :

$$(10) \quad v \rightarrow -i\lambda\lambda,$$

λ et $\vartheta\beta$ étant des constantes à déterminer.

Compte tenu de ces conditions, la fonction v dans le plan λ est donnée par :

$$(11) \quad v = -i\lambda \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{i\vartheta\beta}{\lambda + 1} - \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{V_0\beta}{\pi} \log \frac{e^{i\theta} - \lambda}{e^{-i\theta} - \lambda} + \frac{i\theta}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) V_0\beta + \frac{V_0\sigma}{2} - \frac{i\vartheta\beta}{2},$$

où θ désigne la valeur absolue de l'argument du point N dans le plan λ .

En remplaçant 4λ par A , $\frac{\vartheta\beta}{2}$ par B et λ par $\lambda(Z)$ tiré de la relation (8), il vient :

$$(12) \quad v = -\sqrt{1-Z} \left(\frac{\sqrt{Z}}{B} + A\sqrt{Z} \right) - \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \frac{V_0\beta}{\pi} \log \left(\frac{e^{i\theta} - \lambda(Z)}{e^{-i\theta} - \lambda(Z)} \right) + \frac{V_0\sigma}{2} + \frac{i\theta}{\pi} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) V_0\beta.$$

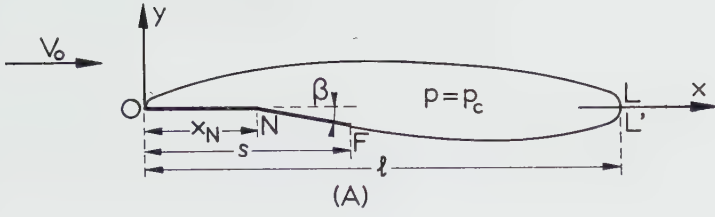


Fig. 57 a

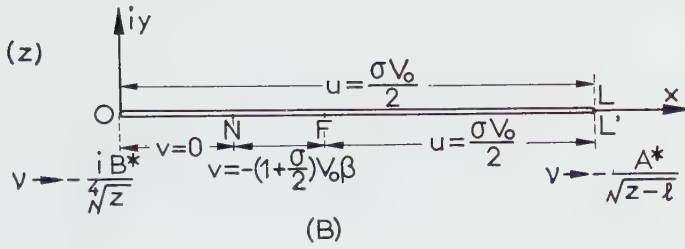


Fig. 57 b

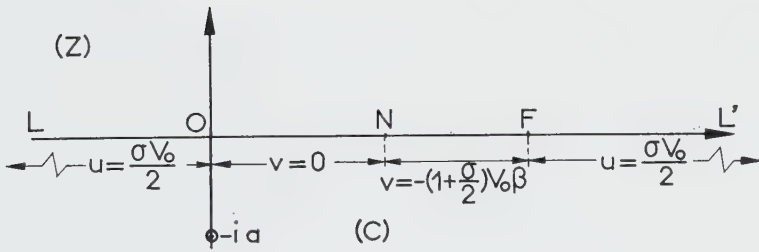


Fig. 57 c

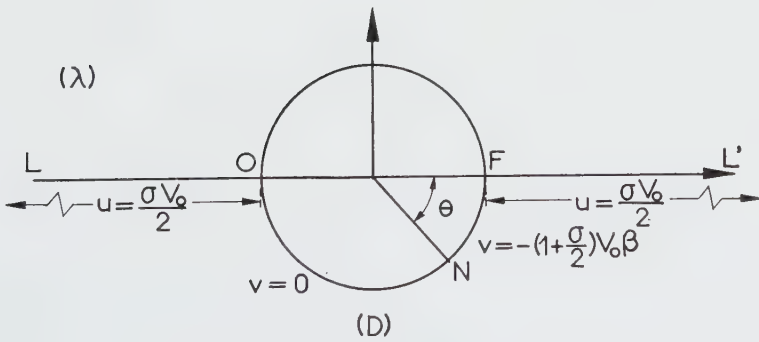


Fig. 57 d

En écrivant que v doit être nul au point $Z = -ia$, qui correspond à l'infini du plan z , on peut finalement déterminer les deux constantes A et B, soient :

$$(13) \quad A = \frac{\left[\frac{V_0 \sigma}{2} - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \frac{V_0 \beta}{\pi} R \right] (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \frac{V_0 \beta}{\pi} (\theta - J) (\sqrt{X} - \sqrt{Y})}{2 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}},$$

$$(14) \quad B = \frac{\sqrt{a} \left\{ \left[\frac{V_0 \sigma}{2} - \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \frac{V_0 \beta}{\pi} R \right] (\sqrt{X} - \sqrt{Y}) + \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \frac{V_0 \beta}{\pi} (\theta - J) (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) \right\}}{2 \sqrt{1 + a^2}},$$

où on a posé :

$$(15) \quad X = \sqrt{1 + a^2} + 1 \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{1 + a^2} - 1$$

et où R et J représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $\log [e^{-i\theta} - \lambda (-ia)] = \log [e^{-i\theta} - \lambda (-ia)]$, c'est-à-dire :

$$(16) \quad R = \frac{1}{2} \log \frac{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2},$$

$$(17) \quad J = \text{arc tg} \frac{2 \sin \theta (\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 - (\sin \theta - \lambda_j)^2},$$

en désignant par :

$$(18) \quad \lambda_r + i \lambda_j = \lambda (-ia) = \sqrt{a} (\sqrt{Y} - \sqrt{X}) - 1 - i [2a + \sqrt{a} (\sqrt{X} + \sqrt{Y})].$$

Il reste à exprimer la condition de fermeture de la poche de cavitation, c'est-à-dire l'identité des ordonnées y_L et $y_{L'}$ des points L et L', soit $\Delta y = y_L - y_{L'} = 0$. Or la circulation Γ et cette distance Δy sont, dans le cas le plus général, liées à l'intégrale curviligne $\int_C v dz$ calculée le long du contour fermé L'FNOL que l'on désigne ici par C :

$$(19) \quad \int_C v dz = \Gamma - i \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) V_0 \Delta y,$$

soit encore :

$$\begin{aligned} (20) \quad \Gamma - i \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) V_0 \Delta y &= \int_{+\infty}^{-\infty} v \frac{2 la^2 Z}{(Z^2 + a^2)^2} dZ \\ &= 2\pi i \left\{ \left[v \frac{d}{dZ} \frac{2 la^2 Z}{(Z - ia)^2} \right]_{Z = -ia} + \left[\frac{2 la^2 Z}{(Z - ia)^2} \frac{dv}{dZ} \right]_{Z = -ia} \right\} \\ &= -\pi la \left[\frac{dv}{dZ} \right]_{Z = -ia}. \end{aligned}$$

La condition de fermeture exige donc, puisque Δy doit être nul, que la partie

imaginaire de l'expression (20) soit nulle; en écrivant ceci, on obtient une relation entre β et σ :

$$(21) \quad \frac{2 + \sigma}{\sigma} \beta = a_1$$

$$= \frac{\pi a}{a R + \theta - J - \frac{\sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{1 + a^2} + a} [4 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2} + 2 a (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) + (\sqrt{X} - \sqrt{Y})] \left[\frac{(\sin \theta - \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} + \frac{(\sin \theta + \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right] + \frac{\sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{1 + a^2} + a} [2 a (\sqrt{X} - \sqrt{Y}) - (\sqrt{X} + \sqrt{Y})] \left[\frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} - \frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right]}$$

Remarquons que si $\frac{x_N}{s} = 0$, on se ramène au cas du profil plan placé à une incidence $\alpha = \beta$, on a $\theta = \pi$ et les valeurs de R et J deviennent nulles, la relation (21) se réduit à :

$$(22) \quad \frac{2 + \sigma}{\sigma} \beta = a_1 = a = \sqrt{\frac{l - s}{s}},$$

que TULIN a déjà donnée.

Le coefficient de portance est donné par :

$$(23) \quad C_z = \frac{2}{\rho V_0^2 s} \int_0^s (p - p_r) dx$$

$$= \frac{2}{\rho V_0^2 s} \int_C \rho V_0 (u - u_c) dz = \frac{2\Gamma}{V_0 s}.$$

D'après la valeur de Γ , on trouve :

$$(24) \quad \frac{C_z}{\sigma} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{1 + a^2} + a) - a_1 a (\sqrt{1 + a^2} - a) \frac{\theta - J}{2} - a_1 (\sqrt{1 + a^2} - a) \frac{R}{2}$$

$$- \frac{a_1 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{2} [4 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2} + 2 a (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) + (\sqrt{X} - \sqrt{Y})]$$

$$\left[\frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} - \frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right]$$

$$- \frac{a_1 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{2} [2 a (\sqrt{X} - \sqrt{Y}) - (\sqrt{X} + \sqrt{Y})]$$

$$\left[\frac{(\sin \theta - \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} + \frac{(\sin \theta + \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right].$$

Si $\frac{x_N}{s} = 0$, on retrouve la formule de TULIN :

$$(25) \quad \frac{C_z}{\sigma} = \frac{\pi}{2} (1 + a^2) (\sqrt{1 + a^2} - a),$$

qui donne le C_z dû à l'effet d'incidence.

Le coefficient de traînée est déduit de :

$$(26) \quad \begin{aligned} C_x &= -\frac{2}{\rho V_0^2 s} \int_0^s (p - p_c) f'_x dx \\ &= -\frac{2}{\rho V_0^2 s} \int_{C'} \rho V_0 (u - u_c) \frac{v}{V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)} dx, \end{aligned}$$

où on a remplacé l'intégrale définie de 0 à s par l'intégrale curviligne effectuée suivant le contour « *non fermé* » L'FNOL (pour laisser de côté la singularité en LL' que l'on désigne par C'). Or, la fermeture de la poche de cavitation entraîne :

$$(27) \quad \frac{2u_c}{V_0 s} \int_{C'} \frac{v}{V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)} dx = \frac{2u_c}{V_0 s} \Delta y = 0,$$

il vient :

$$(28) \quad \begin{aligned} C_x &= -\frac{4}{V_0^2 s (2 + \sigma)} \int_{C'} uv dx \\ &= \frac{2}{V_0^2 s (2 + \sigma)} \Im \int_{C'} v^2 dz \\ &= \frac{4a^2}{V_0^2 s (2 + \sigma)} \Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 Z}{(Z^2 + a^2)^2} dZ \\ &= \frac{4(1 + a^2)a^2}{V_0^2 (2 + \sigma)} \Im \left\{ 2\pi i \left[\frac{d}{dZ} \frac{v^2 Z}{(Z - ia)^2} \right]_{Z = -ia} - \left[\int_{Re i\pi}^{Re 2i\pi} \frac{v^2 Z}{(Z^2 + a^2)^2} dZ \right]_{R \rightarrow \infty} \right\}. \end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière expression est nul. Quand Z tend vers l'infini, on a :

$$(29) \quad v \rightarrow -i\Lambda Z \quad \text{et} \quad \frac{Z}{(Z^2 + a^2)^2} \sim \frac{1}{Z^3}.$$

Il en résulte que :

$$(30) \quad \begin{aligned} C_x &= \frac{4(1 + a^2)a^2\pi}{V_0^2 (2 + \sigma)} \Lambda^2 \\ &= \frac{\beta \sigma a}{2\pi a_1} \left\{ (\pi - a_1 R)^2 (\sqrt{1 + a^2} + a) + a_1^2 (\theta - J)^2 (\sqrt{1 + a^2} - a) \right. \\ &\quad \left. - 2a_1 (\pi - a_1 R) (\theta - J) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur $\frac{C_z \beta}{C_x}$ qui caractérise la finesse du profil, s'écrit :

$$(31) \quad \frac{C_z}{C_x} \beta = \frac{2a_1 \pi}{a} \left(\frac{C_z}{\sigma} \right) \frac{1}{\left\{ (\pi - a_1 R)^2 (\sqrt{1 + a^2} + a) + a_1^2 (\theta - J)^2 (\sqrt{1 + a^2} - a) - 2a_1 (\pi - a_1 R) (\theta - J) \right\}}.$$

On voit que pour $\frac{x_N}{s} = 0$ la valeur de $\frac{C_z \beta}{C_x}$ est égale à l'unité.

Le coefficient de moment par rapport au bord d'attaque est donné par :

$$\begin{aligned}
 (32) \quad C_M &= \frac{2}{\rho V_0^2 s^2} \int_0^s (p - p_c) x dx = \frac{2}{\rho V_0^2 s^2} \int \rho V_0 (u - u_c) x dx \\
 &= \frac{2}{V_0 s^2} \Re \int_C v z dz = \frac{4 a^2 (1 + a^2)^2}{V_0} \Re \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{v Z^3}{(Z^2 + a^2)^3} dZ \\
 &= \frac{3 (1 + a^2)}{4} C_z - \frac{(1 + a^2)^2 a^2 \pi}{2 V_0} \Re \left[\frac{d^2 v}{dZ^2} \right]_{Z = -ia}.
 \end{aligned}$$

Le calcul donne finalement :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad \frac{C_M}{\sigma} &= \frac{3 (1 + a^2)}{4} \left(\frac{C_z}{\sigma} \right) - \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{a_1}{\pi} R \right) [(1 + a^2)^{3/2} - a^3] - \frac{a_1}{16} (\theta - J) (1 + 3a^2) \\
 &+ \frac{a_1 a (1 + a^2)}{2} [8 a (1 + a^2) - a + 4 a^{3/2} (1 + a^2)^{1/2} (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) \\
 &\quad - 2 \sqrt{a} (1 + a^2)^{1/2} (\sqrt{X} - \sqrt{Y})] \\
 &\quad \left[\frac{(\cos \theta - \lambda_r) (\sin \theta - \lambda_j)}{|(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2|^2} + \frac{(\cos \theta - \lambda_r) (\sin \theta + \lambda_j)}{|(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2|^2} \right] \\
 &- \frac{a_1 a (1 + a^2)}{4} [-1 + 4 a^{3/2} (1 + a^2)^{1/2} (\sqrt{X} - \sqrt{Y}) - 2 \sqrt{a} (1 + a^2)^{1/2} (\sqrt{X} + \sqrt{Y})] \\
 &\quad \left[\frac{(\cos \theta - \lambda_r)^2 - (\sin \theta - \lambda_j)^2}{|(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2|^2} - \frac{(\cos \theta - \lambda_r)^2 - (\sin \theta + \lambda_j)^2}{|(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2|^2} \right] \\
 &- \frac{a_1 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{16} [(\sqrt{X} + \sqrt{Y}) + a (\sqrt{X} - \sqrt{Y})] \\
 &\quad \left[\frac{(\sin \theta - \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} + \frac{(\sin \theta + \lambda_j)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right] \\
 &- \frac{a_1 \sqrt{a} \sqrt{1 + a^2}}{16} [a (\sqrt{X} + \sqrt{Y}) - (\sqrt{X} - \sqrt{Y})] \\
 &\quad \left[\frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta - \lambda_j)^2} - \frac{(\cos \theta - \lambda_r)}{(\cos \theta - \lambda_r)^2 + (\sin \theta + \lambda_j)^2} \right].
 \end{aligned}$$

Pour $\frac{x_N}{s} = 0$, cette formule se réduit à :

$$(34) \quad \frac{C_M}{\sigma} = \frac{3 (1 + a^2)}{4} \left(\frac{C_z}{\sigma} \right) - \frac{\pi}{8} (1 + a^2) \left(\sqrt{1 + a^2} + \frac{a}{2} \right).$$

Utilisation pratique de ces résultats. — Pratiquement l'abscisse réduit $\frac{x_N}{s}$ qui fixe le point d'articulation du volet et le braquage β sont donnés; d'après la nature du fluide qui entoure le profil et la vitesse de l'écoulement à l'infini, on connaît aussi la valeur du nombre de cavitation σ [formule (1)] et on peut former le produit $(2 + \sigma) \beta / \sigma$; or, pour $\frac{x_N}{s}$ bien déterminé, ce produit est fonction de la longueur de la poche de cavitation $\frac{l}{s}$ [formule (21)], ainsi on peut déduire la valeur correspon-

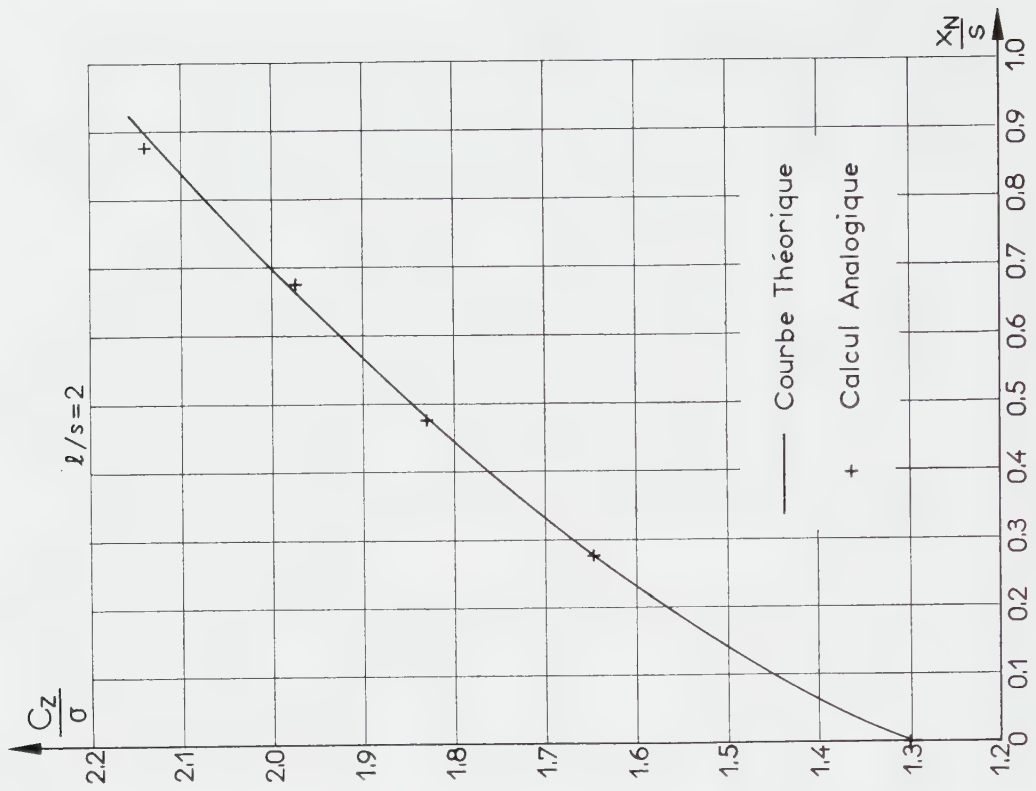


Fig. 59

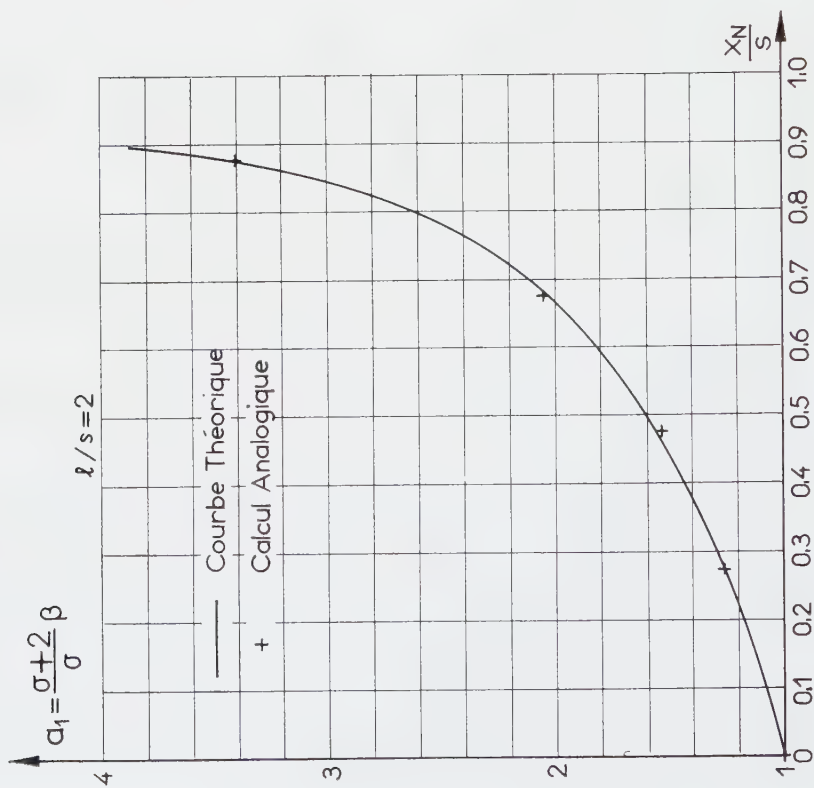


Fig. 58

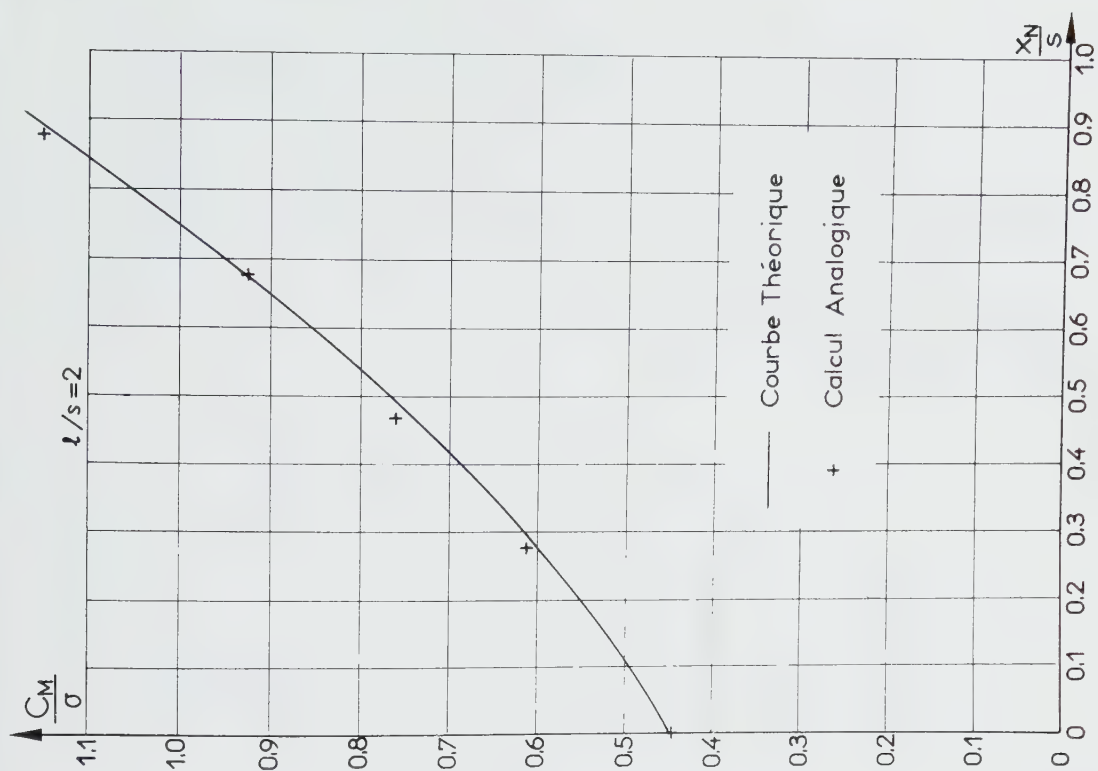


Fig. 61

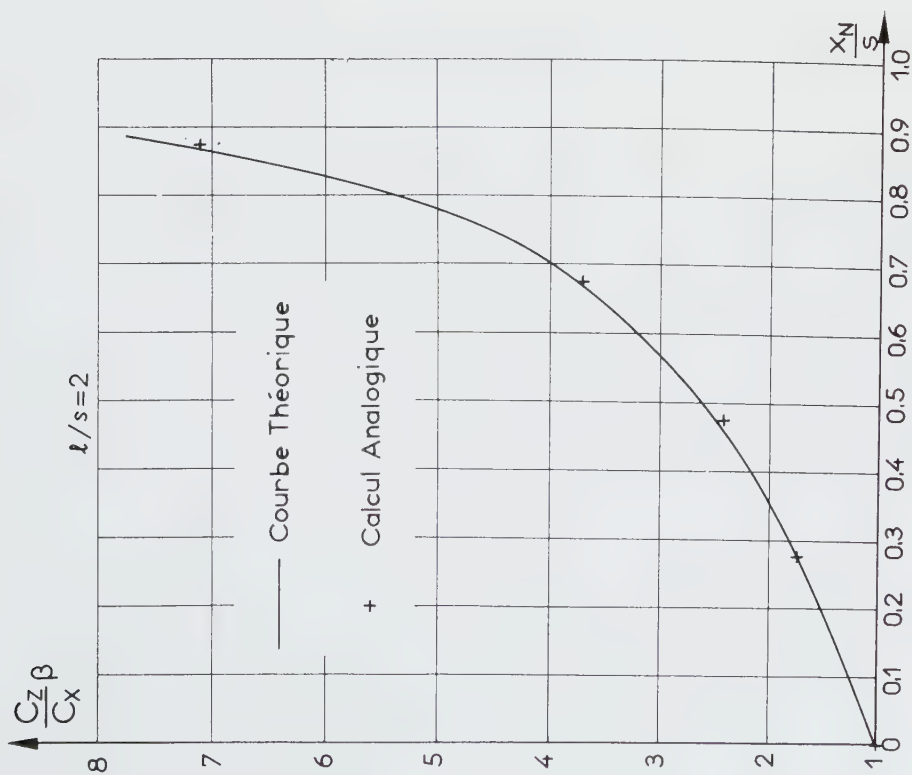


Fig. 60

dante de $\frac{l}{s}$, en la portant dans les formules (24), (31) et (33) et en tirer finalement les valeurs de C_z , C_x et C_M .

Comme exemple d'application, considérons le cas où l'étendue de la poche de cavitation est fixée à deux fois la longueur de la corde du profil $\left(\frac{l}{s} = 2\right)$, c'est-à-dire $a = 1$, à l'aide des formules (21), (22), (24), (25), (31), (33) et (34), nous pouvons déduire la variation de a_1 , $\frac{C_z}{\sigma}$, $\frac{C_x}{C_x}$ et $\frac{C_M}{\sigma}$ en fonction de $\frac{x_N}{s}$. Les résultats sont présentés sur les figures 58, 59, 60 et 61.

4

POTENTIEL DES VITESSES DE PERTURBATION

Dans la représentation analogique l'interprétation la plus aisée concerne le potentiel des vitesses de perturbations φ^* dont dérivent u et v . Il paraît donc intéressant de préciser les conditions aux limites relatives à cette fonction φ^* et les singularités correspondantes.

Considérons d'abord le cas simple de l'écoulement autour d'un profil rectiligne placé à une incidence α , pour le potentiel $\varphi^*(x, y)$, les conditions (2) et (3) s'écrivent :

$$(35) \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \frac{V_0 \sigma}{2} \quad \text{sur OL et FL'}$$

$$(36) \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = -V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha \quad \text{sur OF}$$

A l'extrémité de la poche de cavitation, point L (ou L'), la condition (4) entraîne :

$$(37) \quad \varphi^* \rightarrow \Re \left[-A' \sqrt{z-l} + (u_l - iv_l) z \right],$$

où le premier terme du second membre correspond à une singularité du type $-\sqrt{z}$ dont l'image est présentée sur la figure 55 b, en ce qui concerne le champ de φ^* . Remarquons aussi que si $u_l = 0$, les lignes AL et BL sont encore des équipotentiels même si $v_l \neq 0$; bien entendu, le champ des lignes équipotentiels, en dehors de ALB, se trouve alors modifié par rapport au champ de la figure 55 b.

Au bord d'attaque, la condition (5) entraîne :

$$(38) \quad \varphi^* \rightarrow \Re \left[-iB' z^{3/4} + (u_0 - iv_0) z \right],$$

où le premier terme est une singularité du type $-iz^{3/4}$ (fig. 56 b), pour laquelle les demi-droites Ob et Oa sont des équipotentiels, l'angle bOa étant égal à 240°. Si u_0 et v_0 sont nuls, la représentation analogique de φ^* , qui se réduit alors à la singularité $-iz^{3/4}$, ne présente pas de difficulté spéciale; mais, par contre, la présence du terme $(u_0 - iv_0)z$, qui correspond à un champ uniforme à superposer au champ de la singularité précédente, complique l'interprétation analogique du problème. On se

rend compte que de la représentation électrique de la condition du bord d'attaque doit, en effet, dépendre la répartition de φ^* sur l'ensemble du profil et, en définitive, la précision de la résolution analogique. Il est donc nécessaire de procéder de façon à obtenir une simulation aussi correcte que possible du champ au voisinage du bord d'attaque.

Dans ce but, on a intérêt à définir le potentiel de perturbation un peu différemment en écrivant le potentiel des vitesses Φ de l'écoulement général sous la forme suivante :

$$(39) \quad \Phi = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) x - V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha y + \varphi.$$

Les conditions aux limites pour cette fonction (x, y) sera (fig. 62) :

a) à l'infini, comme $\Phi'_x = V_0$ et $\Phi'_y = 0$, on a :

$$(40) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_\infty = -\frac{V_0 \sigma}{2}.$$

$$(41) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_\infty = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha;$$

b) sur le profil, la condition de glissement d'après (2) et (3) devient :

$$(42) \quad \Phi'_y = -V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

qui est imposée sur sa projection OF;

c) la pression est toujours donnée par la formule de BERNOULLI linéarisée qui s'écrit :

$$(43) \quad p - p_0 = -\rho V_0 \left(\frac{V_0 \sigma}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Sur les projections des lignes de courant OF et FL', en écrivant que la pression p est égale à p_c avec $p_c - p_0 = -\frac{\rho V_0^2 \sigma}{2}$, on a d'après (43) :

$$(44) \quad \rho V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = p_c - p_0 + \frac{\rho V_0^2 \sigma}{2} = 0;$$

d) au bord d'attaque φ est encore représenté par l'expression (38), mais cette fois $u_0 = v_0 = 0$. La configuration des lignes équipotentielles au voisinage immédiat de O sera conforme à l'image donnée sur la figure 56 b;

e) à l'extrémité de la cavitation (point L ou L'), est exprimé par l'expression (37) dans laquelle u_l est cette fois égal à zéro;

f) la condition de JOUKOWSKY au bord de fuite F exige que $(\varphi'_y)_F = 0$ ou $(\varphi'_x)_F = 0$;

g) autour d'un profil portant il existe toujours une circulation Γ , et le potentiel φ , multiforme dans le plan xy subit donc un saut égal à Γ en traversant la coupure Lx;

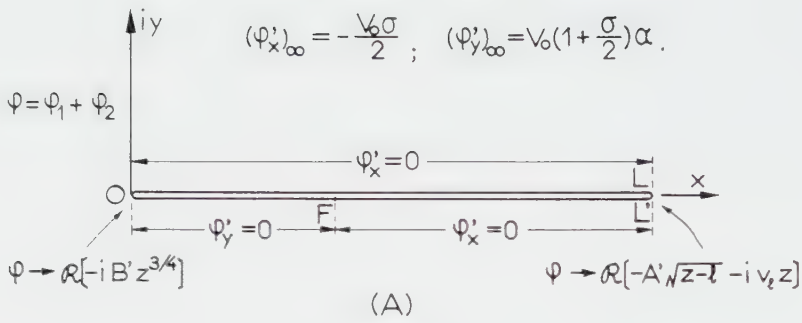


Fig. 62 a

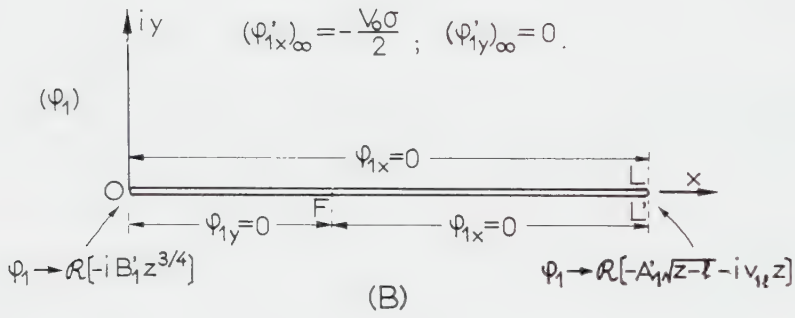


Fig. 62 b

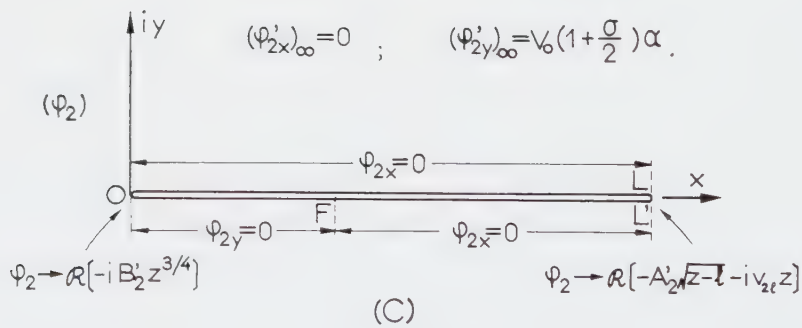


Fig. 62 c

h) la fermeture de la poche de cavitation exige que :

$$(45) \quad \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \int_C y'_x dx = 0,$$

l'intégrale curviligne est effectuée suivant le trajet L'FOL que l'on désigne par C.

Dans la représentation analogique, il est commode de décomposer φ en deux parties φ_1 et φ_2 :

$$(46) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

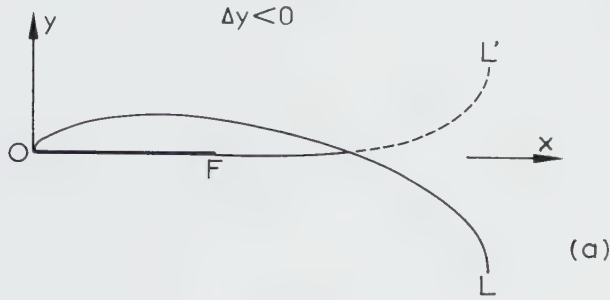


Fig. 63 a

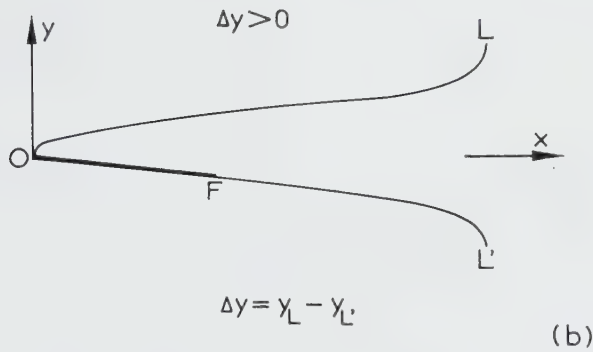


Fig. 63 b

A l'infini du plan xy , nous poserons :

$$(47) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_\infty = -\frac{V_0 \sigma}{2}, \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_\infty = 0 \end{cases}$$

et :

$$(48) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)_\infty = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_\infty = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha. \end{cases}$$

de manière à retrouver les conditions (40) et (41) en faisant la somme. Les conditions de *b*) à *g*) s'appliquent sans modification pour φ_1 et φ_2 . Enfin, la condition de fermeture *h* s'écrit :

$$(49) \quad \int_c \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dx + \int_c \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} dx = 0.$$

On remarquera donc que pour chacun des potentiels φ_1 ou φ_2 l'intégrale $\int_c \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} dx$ est différente de zéro, ce qui signifie que pour des écoulements φ_1 et φ_2 , pris séparément, la condition de fermeture n'est pas respectée et que les lignes de courant correspondantes OL et FL' se croisent ou ne se raccordent pas (*fig. 63*).

5

CALCUL ANALOGIQUE

Dans ce qui suit, le potentiel électrique d'une cuve plane est identifié au potentiel φ . La *figure 64* représente le montage électrique envisagé. Le segment OLI

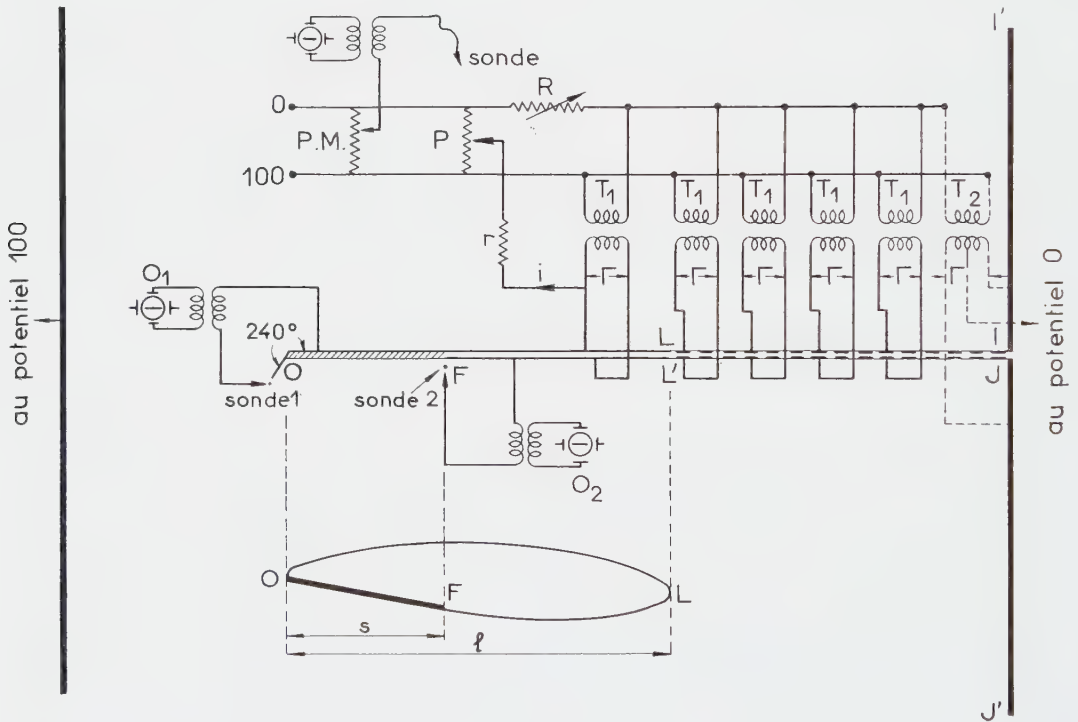


Fig. 64

est formé par une plaque en plexiglas, la partie OF, qui correspond à l'intrados du profil, est laissée isolante, d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Les parties OL et FL' qui correspondent aux projections des lignes de courant limitant la poche de cavitation sont recouvertes par des électrodes continues de manière que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ soit automatiquement assuré.

Une différence de potentiel égale à la circulation Γ est appliquée entre OL et FL' par un transformateur T_1 dont une des bornes est branchée à un potentiomètre P qui se trouve entre le zéro et le cent de l'alimentation; cet arrangement permet de retirer ou d'injecter du courant à travers des électrodes OL et FL'. Les parties LI et L'J sont recouvertes par des petites électrodes en vis-à-vis, chaque paire d'électrodes est alimentée par une différence de potentiel aussi égale à Γ au moyen d'un transformateur distinct; ainsi le potentiel φ subit un saut correspondant à la circulation Γ en traversant la coupure LI tout en gardant la continuité de grad φ . La valeur de Γ à imposer peut être ajustée, grâce à une résistance variable R branchée en série, dans le circuit des primaires des transformateurs T_1 qui sont tous identiques. Au voisinage du bord d'attaque O, le champ φ doit présenter la configuration donnée sur la *figure 56 b*, dans ce but une partie de la ligne équipotentielle bOa est matérialisée, à partir de O, par une petite électrode orientée suivant l'angle de 240° . Dans le prolongement immédiat de celle-ci est placée une sonde qui permet, en branchant un indicateur de zéro O_1 entre elle et l'électrode OL, de s'assurer que l'équipotentielle relevée dans le bassin aboutit bien à l'extrémité de la petite électrode auxiliaire.

Au bord de fuite F, il faut imposer la condition de JOUKOWSKY $(\varphi'_y)_F = 0$; une sonde est placée au voisinage immédiat devant le point F, un indicateur de zéro O_2 branché entre cette sonde et l'électrode FL' permet de contrôler la nullité de la dérivée normale du φ . Grâce aux réglages du potentiomètre P et de la résistance variable R, on peut réaliser simultanément les conditions à imposer au bord d'attaque et au bord de fuite. Enfin, notons que la condition à imposer au point L est assurée automatiquement puisque OL et FL' sont déjà des équipotentielles. Un pont de mesure branché entre zéro et cent servira pour toutes les mesures. Ce qui vient d'être dit est valable à la fois pour la représentation de φ_1 et φ_2 .

5.1 Représentation de φ_1 .

Dans le mouvement φ_1 , il faut établir un champ uniforme à l'infini parallèle à l'axe des x , pour cela, les parties II' et JJ' du bord de la cuve sont recouvertes par des électrodes continues. Pour établir la circulation, elles doivent être portées à une différence de potentiel égale à Γ au moyen d'un transformateur T_2 , le milieu du secondaire de ce transformateur étant branché au potentiel zéro; le bord opposé de la cuve est lui aussi recouvert d'une électrode qui sera portée au potentiel cent, nous aurons ainsi :

$$(50) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_\infty = -\frac{V_0 \sigma}{2} = -\frac{100}{L_1},$$

où L_1 désigne la distance entre les deux bords de la cuve, supposés très écartés. Ayant réalisé les conditions au bord d'attaque O et au bord de fuite F en agissant sur P et R, la valeur de la circulation Γ_1 ainsi que l'intensité du courant i_1 délivrée par le potentiomètre P se trouvent aussi déterminées. La valeur de Γ_1 est naturellement proportionnelle à celle de $s \frac{V_0 \sigma}{2}$ et la circulation, mise sous forme sans dimension, s'écrit :

$$(51) \quad \frac{\Gamma_1}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} = \frac{\Gamma_1}{100} \frac{L_1}{s}.$$

L'existence d'un courant i_1 correspond à un croisement ou un écartement des lignes de courant OL et FL' (fig. 11), en effet, on a :

$$(52) \quad \frac{\varphi_1}{h_1} i_1 = - \int_c \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = - V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \int_c y'_x dx = - V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \Delta y_1,$$

où φ_1 et h_1 désignent respectivement la résistivité et la hauteur d'eau dans la cuve, et $\Delta y_1 = y_L - y_{L'}$. La quantité figurant dans le dernier membre de (52) est aussi proportionnelle à la valeur de $s \frac{V_0 \sigma}{2}$, ainsi on peut déduire la quantité sans dimension par :

$$(53) \quad \frac{y_1}{s} \frac{2 + \sigma}{\sigma} = - \frac{1}{100} \frac{L_1}{s} \frac{\varphi_1}{h_1} i_1.$$

D'une manière générale, chaque fois qu'on relève une valeur de potentiel dans la cuve, il faut la diviser par la valeur $100 \frac{s}{L_1}$ pour obtenir un résultat sans dimension :

$$(54) \quad \frac{\varphi_1}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} = \frac{\varphi_1}{100} \frac{L_1}{s}.$$

5.2 Représentation de φ_2 .

Le champ uniforme à l'infini est cette fois dirigé suivant l'axe des y ; le bord I'J' ainsi que le bord opposé de la cuve sont donc rendus isolants; le circuit tracé en pointillé sur la figure 64 est bien entendu supprimé; les bords supérieur et inférieur de la cuve (non représentés sur la fig. 64) doivent être rendus conducteur, le potentiel 100 est affiché au bord supérieur, et le potentiel zéro à bord inférieur, on aura ainsi :

$$(55) \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)_c = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \alpha = \frac{100}{L_2},$$

où L_2 désigne la largeur de la cuve. Ayant réglé les conditions au bord d'attaque et au bord de fuite en agissant sur P et R, la valeur de la circulation Γ_2 ainsi que l'intensité du courant i_2 provenant du P se trouvent bien déterminées. Γ_2 est ici proportionnel à $s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \alpha$, et la circulation réduite s'écrit :

$$(56) \quad \frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \alpha} = \frac{\Gamma_2}{100} \frac{L_2}{s}.$$

L'intensité i_2 est reliée à $\Delta y_2 = y_L - y_{L'}$ par :

$$(57) \quad \frac{\varphi_2}{h_2} i_2 = - V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \Delta y_2,$$

où φ_2 et h_2 désignent la résistivité et la hauteur d'eau dans la cuve. La quantité figurant

au second membre est proportionnelle à la valeur de $sV_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha$ donnée par (55), et on peut déduire la quantité sous forme sans dimension par :

$$(58) \quad \frac{\Delta y_2}{s} \frac{1}{\alpha} = - \frac{1}{100} \frac{L_2}{s} \frac{\rho_2}{h_2} i_2.$$

Dans ces expériences, il faut, chaque fois qu'on relève une valeur de potentiel dans la cuve, la diviser par la valeur $100 \frac{s}{L}$ pour obtenir un résultat sans dimension :

$$(59) \quad \frac{\varphi_2}{sV_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha} = \frac{\varphi_2}{100} \frac{L_2}{s}.$$

5,3 Composition de φ_1 et φ_2 .

On ne peut évidemment attribuer des valeurs quelconques aux σ et α puis additionner simplement φ_1 et φ_2 pour constituer φ : il faut avant tout vérifier la condition de fermeture de la poche de cavitation, c'est-à-dire vérifier que :

$$(60) \quad \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = y_1 - y_L = 0;$$

or, compte tenu des relations (53) et (58), on a :

$$(61) \quad - \frac{\sigma}{2 + \sigma} \frac{L_1}{100} \frac{\rho_1}{h_1} i_1 - \alpha \frac{L_2}{100} \frac{\rho_2}{h_2} i_2 = 0,$$

d'où :

$$(62) \quad \frac{(2 + \sigma)}{\sigma} \alpha = - \frac{L_1}{L_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{h_2}{h_1} \frac{i_1}{i_2} = a;$$

on voit ainsi que a est une constante parfaitement déterminée par le calcul analogue. La condition de fermeture de la poche de cavitation fournit donc une relation entre α et σ . Dans la suite, nous donnerons une comparaison de la valeur a avec le résultat de la formule (22) déduit du calcul théorique.

La fonction φ est déterminée, à partir des résultats précédents, par :

$$(63) \quad \varphi = s \frac{V_0 \sigma}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \right) + a \left(\frac{\varphi_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha} \right) \right].$$

La pression donnée par la formule de BERNOULLI linéarisée (43), permet le calcul du coefficient de portance C_z qui s'écrit :

$$(64) \quad \frac{C_z}{\sigma} = \frac{\Gamma}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} = \left(\frac{\Gamma_1}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \right) + a \left(\frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha} \right).$$

De même, le coefficient de moment par rapport au bord d'attaque s'écrit :

$$(65) \quad C_M = \frac{1}{\frac{1}{2} V_0^2 s^2} \int_0^s (p - p_c) x dx = -\sigma \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \right) \left(\frac{x}{s} \right) d \left(\frac{x}{s} \right),$$

et finalement en intégrant :

$$(66) \quad \frac{C_M}{\sigma} = \int_0^1 \frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} d \left(\frac{x}{s} \right).$$

5,4 Expériences et résultats

Comme exemple d'application de la méthode exposée, nous avons traité le cas où $\frac{l}{s} = 2$; la corde du profil s était représentée sur le modèle par une longueur de 20 cm, et l'étendue de la poche de cavitation l , par 40 cm. Au bord d'attaque O, la petite électrode figurant la singularité a été choisie égale à 15 mm de long. Pour éviter l'effet de paroi d'une cuve limitée, les représentations ont été effectuées dans les cuves associées par inversion [20], l'une des deux cuves représente le plan z où se trouvent le profil et une partie de son sillage, l'autre représente le plan Z où figure le prolongement du sillage, l'origine du plan Z , qui représente l'infini du plan z , est au centre de la cuve, on a $Z = \frac{\mathfrak{P}}{z}$ avec $\mathfrak{P} = 170\,392 \text{ mm}^2$. Le champ uniforme à l'infini du plan z est assuré par un doublet orientable placé en l'origine du plan Z . Le diamètre des quatre demi-cercles constituant ce doublet a été choisi égal à 70 mm. L'ensemble du montage précédent correspond ainsi à une cuve carrée fictive dont la longueur L_1 ou L_2 des côtés atteint 4 870 mm.

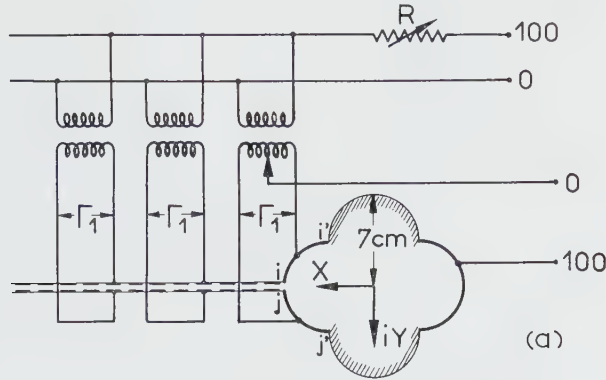
Suivant la représentation de φ_1 ou de φ_2 , l'alimentation de la cuve Z est indiquée sur la *figure* 65; noter que, dans la représentation de φ_1 , une différence de potentiel égale à Γ_1 est appliquée entre les électrodes $j'j$ et ii' qui sont séparées par la coupure de sillage.

Dans les cuves z et Z , la résistivité de l'eau ρ n'est pas nécessairement identique, il faut toujours ajuster la hauteur d'eau h pour que, le quotient $\frac{\rho}{h}$ admette une valeur bien déterminée dans ces deux cuves.

La représentation de φ_1 a fourni la répartition de $\frac{2\varphi_1}{sV_0\sigma}$ sur l'intrados du profil (*fig.* 66). Les valeurs de $\frac{2\Gamma_1}{sV_0\sigma}$ et de $\frac{\Delta y_1(2+\sigma)}{s\sigma}$ déduites des formules (51) et (53) sont respectivement égales à 0,646 et $-3,77$. Par un calcul théorique, semblable à celui du paragraphe 3 et appliqué au cas où $\frac{l}{s} = 2$, il est possible de montrer que $\frac{2\Gamma}{sV_0\sigma} = 0,65$ et $\frac{\Delta y_1(2+\sigma)}{s\sigma} = -3,79$. L'accord entre ces résultats se révèle satisfaisant.

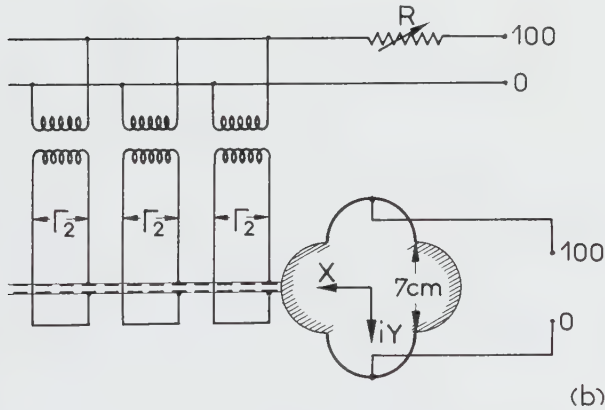
La réalisation du champ φ_2 , suivant la méthode indiquée ci-dessus, permet

d'obtenir la répartition de $\frac{\varphi_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha}$, le résultat est présenté par la courbe B de la figure 67. Les valeurs de $\frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha}$ et de $\frac{y_2}{s \alpha}$ déduites des formules (56) et (58)



Représentation de Ψ_1

Fig. 65 a



Représentation de Ψ_2

ALIMENTATION DE LA CUVE $Z = \rho/z$

Fig. 65 b

sont respectivement égales à 0,53 et 3,9. Or, d'après un calcul théorique, on trouve $\frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha} = 0,65$ et $\frac{\Delta y_2}{s \alpha} = 3,79$. L'écart entre les résultats théoriques et ceux du calcul analogique est considérable. Mais si nous affichons la bonne valeur de

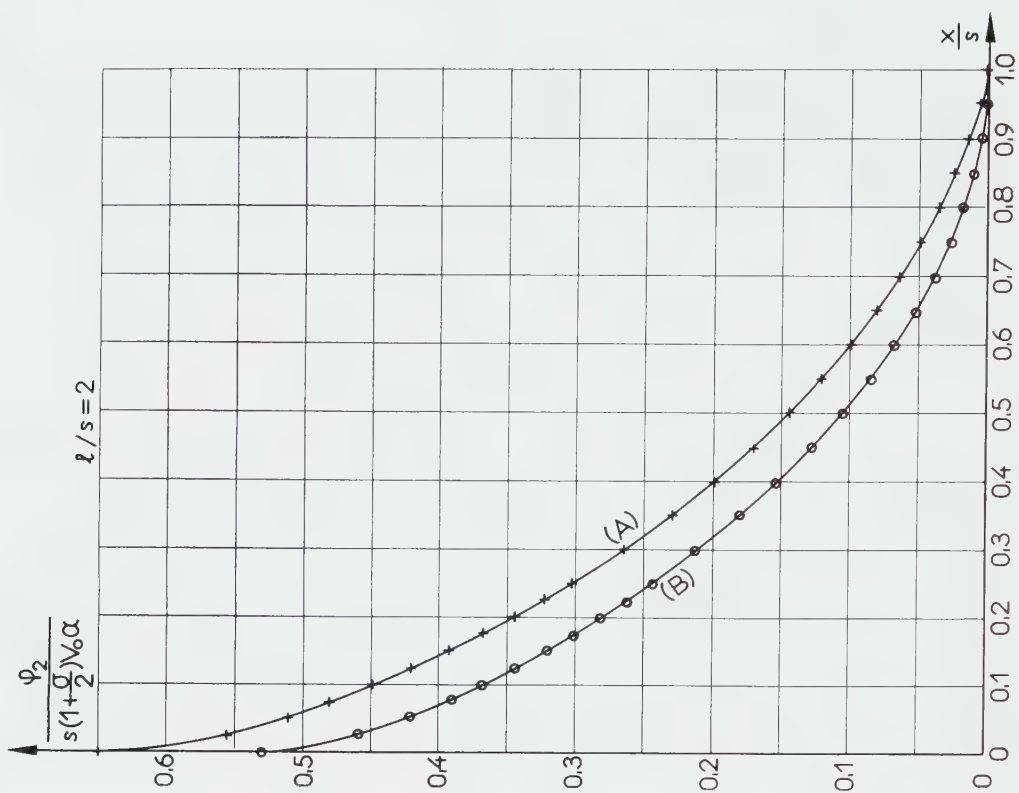


Fig. 67

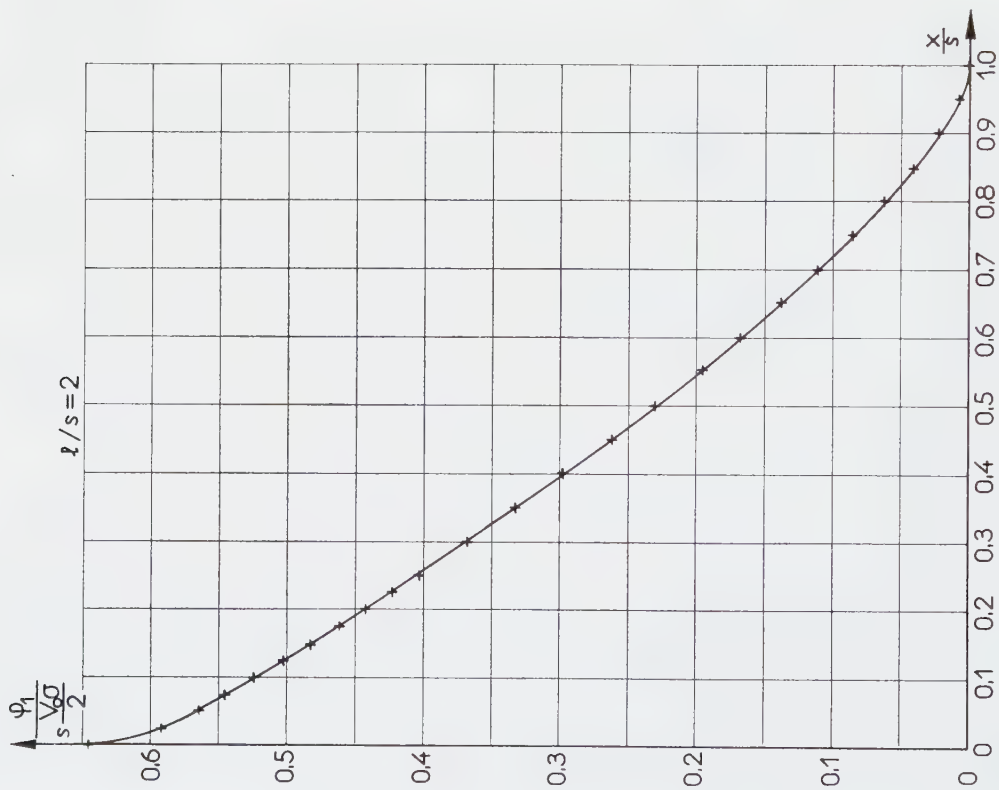


Fig. 66

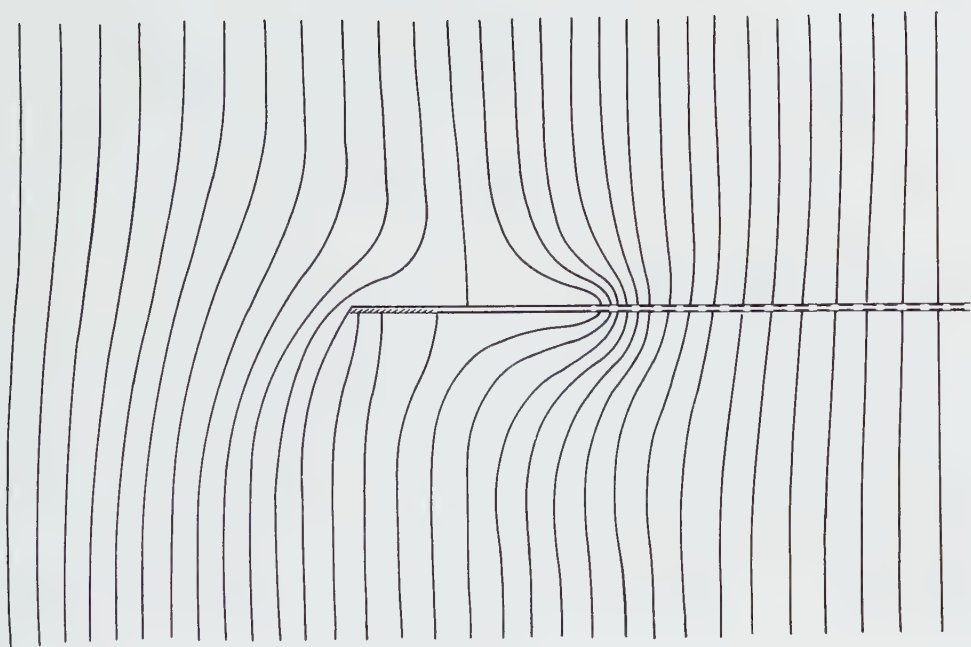


Fig. 68

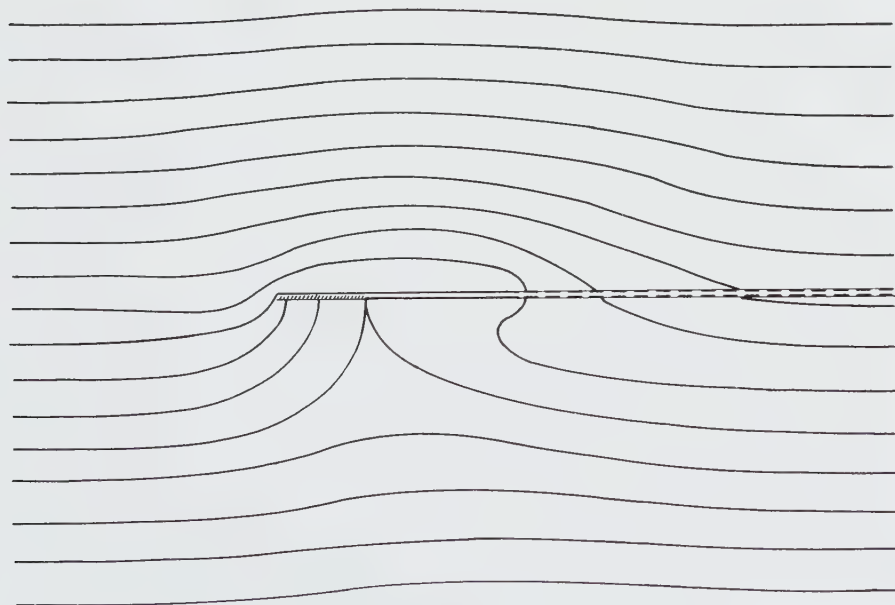


Fig. 69

$\frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha}$ et réalisons en même temps la condition de JOUKOWSKY au bord de

fuite en agissant sur la résistance R et le potentiomètre P, le réglage concernant la singularité étant laissé de côté, le champ φ_2 ainsi réalisé fournit la valeur $\frac{\Delta y_2}{s \alpha} = 3,79$

qui coïncide avec la valeur théorique. La répartition de $\frac{\zeta_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha}$ correspon-

dante sur l'intrados est représentée par la courbe A de la *figure 67*.

Une investigation minutieuse des lignes équipotentiellles au voisinage du bord d'attaque a montré que la longueur de la petite électrode figurant la singularité avait une influence prépondérante sur les résultats du calcul analogique et particulièrement pour le mouvement φ_2 . En effet, d'après les *figures 68* et *69* qui reproduisent les équipotentiellles de φ_1 et φ_2 , nous remarquons que si le champ uniforme établi à l'infini du plan x, y est dirigé suivant l'axe des x comme dans le cas de φ_1 , la singularité, qui a une longueur de 15 mm devant le profil de 20 cm, n'apporte pas de perturbations sensibles : au voisinage du bord d'attaque, la configuration des équipotentiellles correspond bien à celle représentée par la *figure 56 b*, c'est pourquoi nous avons pu obtenir des bons résultats dans le calcul analogique de φ_1 ; par contre, si le champ uniforme à l'infini est dirigé suivant l'axe des y comme dans le cas de φ_2 , et lorsque la valeur théorique $\frac{\Gamma_2}{s V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \alpha}$ - et la condition de JOUKOWSKY au bord de fuite sont

imposées, on constate qu'au voisinage du bord d'attaque O, le champ n'admet la configuration de la *figure 56 b* que dans une région strictement réduite, par conséquent la longueur de la singularité que nous avons adoptée se trouve déjà trop importante pour permettre d'obtenir des résultats corrects.

En prenant pour résultat de φ_2 la courbe A de la *figure 67*, on peut composer φ_1 et φ_2 pour constituer φ . Dans ces conditions la formule (60) qui exprime la condition de fermeture de la poche de cavitation fournit la valeur de $a = \frac{(2 + \sigma) \alpha}{\sigma}$ qui est ici égale à 1,005 au lieu de 1 que donne le calcul théorique. La répartition de $\frac{2\varphi}{s V_0 \sigma}$ donnée par (63) est représentée par la courbe marquée $\frac{x_N}{l} = 0$ de la *figure 72*. Le coefficient de portance $\frac{C_z}{\sigma}$ calculé d'après (64) est égal à 1,301 contre la valeur théorique 1,3. Le coefficient de moment $\frac{C_M}{\sigma}$, évalué à l'aide de la formule (66), est égal à 0,445 et sa valeur théorique doit être 0,448.

6

EXTENSION DE LA MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DES PROFILS COURBES

On peut aussi appliquer la représentation analogique pour traiter les profils courbes, à condition que le bord d'attaque du profil soit dirigé parallèlement à la vitesse V_0 de l'écoulement à l'infini.

6,1 Potentiel des vitesses de perturbation.

Nous définissons le potentiel de perturbation en écrivant le potentiel des vitesses de l'écoulement général sous la forme :

$$(67) \quad \Phi = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) x + \varphi.$$

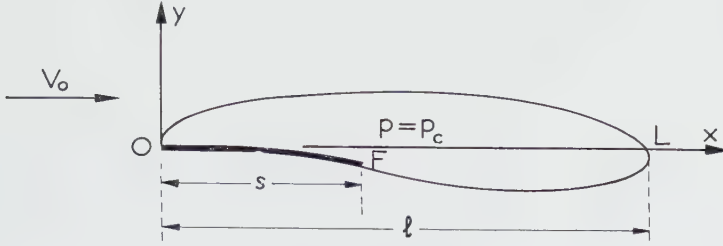


Fig. 70 a

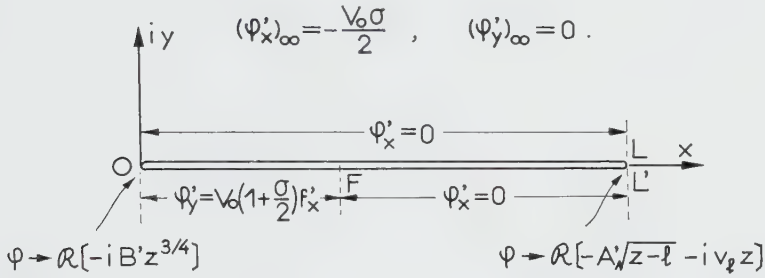


Fig. 70 b

Les conditions aux limites pour le potentiel γ sont (fig. 70) :

a) à l'infini, comme $(\Phi'_x)_\infty = V_0$ et $(\Phi'_y)_\infty = 0$, on a :

$$(68) \quad (\varphi'_x)_\infty = -\frac{V_0 \sigma}{2} \quad \text{et} \quad (\varphi'_y)_\infty = 0;$$

b) sur l'intrados du profil, la condition de glissement s'écrit :

$$(69) \quad \varphi'_y = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) f'_x,$$

où f'_x définit la loi de cambrure du profil. Comme le bord d'attaque du profil doit être dirigé parallèlement à la vitesse V_0 , on aura $f'_x(0) = 0$, donc φ'_y est égal à zéro à l'intrados tout près du bord d'attaque;

c) sur OL et FL' de l'axe des x , en exprimant que la pression est égale à p_c de la poche de cavitation, on a $\varphi'_x = 0$;

d) au bord d'attaque O, comme $(\varphi'_y)_0 = 0$ à l'intrados et $(\varphi'_x)_0 = 0$ à l'extrados, φ doit vérifier $\varphi \rightarrow \mathcal{R}[-iB' z^{3/4}]$ d'après (38);

e) au voisinage du point L (ou L'), comme on a $\varphi'_x = 0$ sur OL et à FL', φ doit vérifier $\varphi \rightarrow \Re [-A' \sqrt{z-l} - iv_l z]$ d'après (37);

f) la condition de JOUKOWSKY au bord de fuite entraîne la continuité de φ'_y et φ'_x au point F, comme $\varphi'_x = 0$ sur FL', on doit avoir $(\varphi'_x)_F = 0$;

g) la circulation Γ : le potentiel φ subit un saut égal à Γ en traversant la coupure LI;

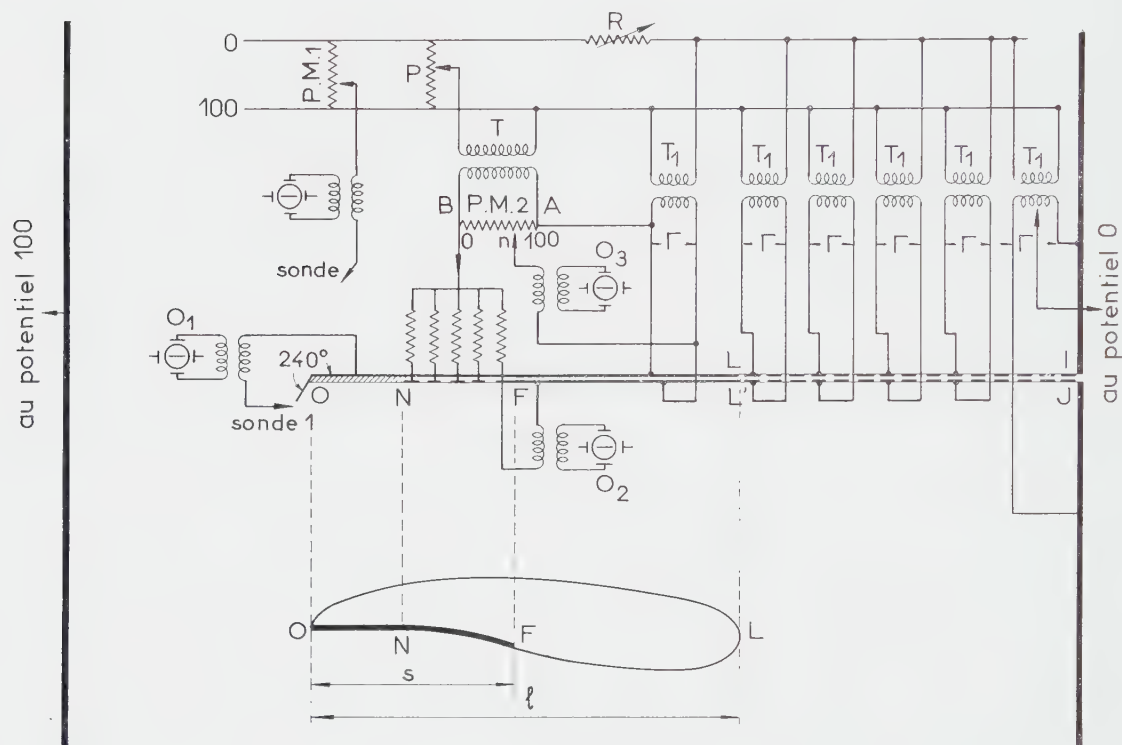


Fig. 71

h) la fermeture de la poche de cavitation exige que :

$$(70) \quad \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) \int_C y'_x dx = 0.$$

l'intégrale curviligne étant prise suivant le trajet L'FOL.

6,2 Représentation analogique.

La figure 71 donne le montage électrique, on constate qu'il est semblable à celui qu'on a utilisé pour la représentation de φ_1 . Mais cette fois-ci, pour contrôler la condition de JOUKOWSKY, $[(\varphi'_x)_F = 0]$, l'indicateur de zéro est branché entre l'électrode FL' et la dernière électrode de la partie NF. Sur la partie NF de l'intrados où le profil est courbé, on a collé des petites électrodes de largeur ϵ , ces électrodes sont alimentées à travers des grandes résistances r par un transformateur T dont le rapport

d'amplification est très supérieur à ceux qu'on utilise pour imposer la circulation Γ de la façon que la valeur $\varphi_A - \varphi_B$ soit très grande par rapport à Γ , ($\varphi_A - \varphi_B > 20 \Gamma$), la borne A est reliée à l'électrode OL, ainsi la somme algébrique du courant traversant les électrodes se trouvant dans les parties OL, NF et FL' admet une valeur nulle, la condition de fermeture de la poche de cavitation est ainsi assurée automatiquement.

Comme nous avons déjà imposé $-(\varphi'_x)_\infty = \frac{V_0 \sigma}{2}$ à la valeur $\frac{100}{L_1}$ dans la représentation analogique et étant donné que la poche de cavitation est fermée, la loi fixant la forme du profil, soit f'_x , n'est définie qu'à une proportionnalité près; posons :

$$(71) \quad f'_x = \beta F'_x,$$

où F'_x est une loi de cambrure choisie pour définir une famille de profils à une dilatation près, β est un facteur à déterminer par le calcul analogique; pour un profil plan muni d'un volet rectiligne par exemple, nous pouvons choisir $F'_x = 0$ dans la partie ON et $F'_x = -1$ dans la partie NF; β correspondra dans ce cas à l'angle de braquage du volet. La condition de glissement dans la partie NF devient :

$$(72) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \beta F'_x.$$

En exprimant φ'_y par des grandeurs électriques, il vient :

$$(73) \quad \frac{\rho}{\varepsilon h} \frac{\varphi_B - \varphi}{r} = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \beta F'_x,$$

où ρ et h désignent respectivement la résistivité et la hauteur d'eau de la cuve, et ε la largeur de l'électrode considérée, φ désigne la valeur du potentiel de cette électrode. Comme $\varphi_A - \varphi$ est inférieur mais voisin de la valeur Γ , on peut écrire $\varphi \approx \varphi_A - \Gamma$ et remplacer $\varphi_B - \varphi$ par $-(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma$, l'équation (73) s'écrit :

$$(74) \quad -\frac{\rho}{\varepsilon h} \frac{(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma}{r} = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \beta F'_x.$$

En choisissant la valeur du produit εr inversement proportionnelle à $-F'_x (> 0)$, soit $\varepsilon r = -\frac{K}{F'_x}$, la condition (74) sera vérifiée pourvu que l'on prenne β comme solution de :

$$(75) \quad V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \beta = \frac{\rho}{hK} [(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma].$$

Dans cette équation les valeurs de $\varphi_A - \varphi_B$ et de Γ sont bien déterminées, car elles sont réglées au moyen du potentiomètre P et de la résistance R pour imposer simultanément les conditions au bord d'attaque et au bord de fuite. La valeur $V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) \beta$, homogène à une vitesse, doit être proportionnelle à $\frac{V_0 \sigma}{2}$, or :

$$(76) \quad \frac{V_0 \sigma}{2} = \frac{100}{L_1},$$

en divisant membre à membre les expressions (75) et (76), on obtient :

$$(77) \quad \frac{2 + \sigma}{\sigma} \beta = \frac{L_1}{h} \frac{\rho}{K} \frac{(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma}{100} = a_1.$$

a_1 est une constante qui peut être déduite du calcul analogique; nous trouvons donc une relation entre β et σ . S'il s'agit d'un profil plan muni d'un volet rectiligne, il sera intéressant de comparer le résultat avec la formule (21) du paragraphe 3.

Pour évaluer la valeur de $\varphi_A - \varphi_B$, nous faisons l'arrangement suivant : nous branchons un pont de mesure PM_2 entre les bornes A et B tel que les divisions cent et zéro de ce pont se trouvent respectivement devant A et B. A l'aide d'un indicateur de zéro O_3 , on mesure la circulation avec PM_2 : si l'équilibre de O_3 est obtenue pour la division n du pont PM_2 , on a :

$$(78) \quad \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\Gamma} = \frac{100}{100 - n},$$

cette relation permet de calculer la valeur de $\varphi_A - \varphi_B$ à partir de la valeur Γ mesurée à l'aide du pont de mesure PM_1 dans l'échelle de zéro-cent de l'alimentation générale.

Chaque fois qu'on relève une valeur du potentiel dans la cuve, il faut la diviser par $\frac{100s}{L_1}$ pour obtenir le résultat sous forme sans dimension :

$$(79) \quad \frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} = \frac{\varphi}{100} \frac{L_1}{s}.$$

Le coefficient de portance est donné par :

$$(80) \quad \frac{C_z}{\sigma} = \frac{\Gamma}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} = \frac{\Gamma}{100} \frac{L_1}{s}.$$

Le coefficient de moment par rapport au bord d'attaque est encore donné par la formule (66) établie dans le paragraphe précédent.

Le coefficient de traînée est déduit de :

$$(81) \quad \begin{aligned} C_x &= -\frac{2}{\rho V_0^2 s} \int_0^s (p - p_c) f'_x dx \\ &= \int_0^1 \sigma \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \right) f'_x d \frac{x}{s} = \frac{a_1 \sigma^2}{2 + \sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \right) F'_x d \left(\frac{x}{s} \right). \end{aligned}$$

S'il s'agit d'un profil plan muni d'un volet rectiligne, cette formule se réduit à :

$$(82) \quad \frac{C_x}{\sigma} = \frac{\beta}{s \frac{V_0 \sigma}{2}} \left[\varphi \left(\frac{x_N}{s} \right) - \varphi(1) \right].$$

Dans ce cas particulier, la finesse définie par $\beta \frac{C_z}{C_x}$ est donnée par la formule très simple :

$$(83) \quad \beta \frac{C_z}{C_x} = \frac{\Gamma}{\varphi(x_N) - \varphi(s)}.$$

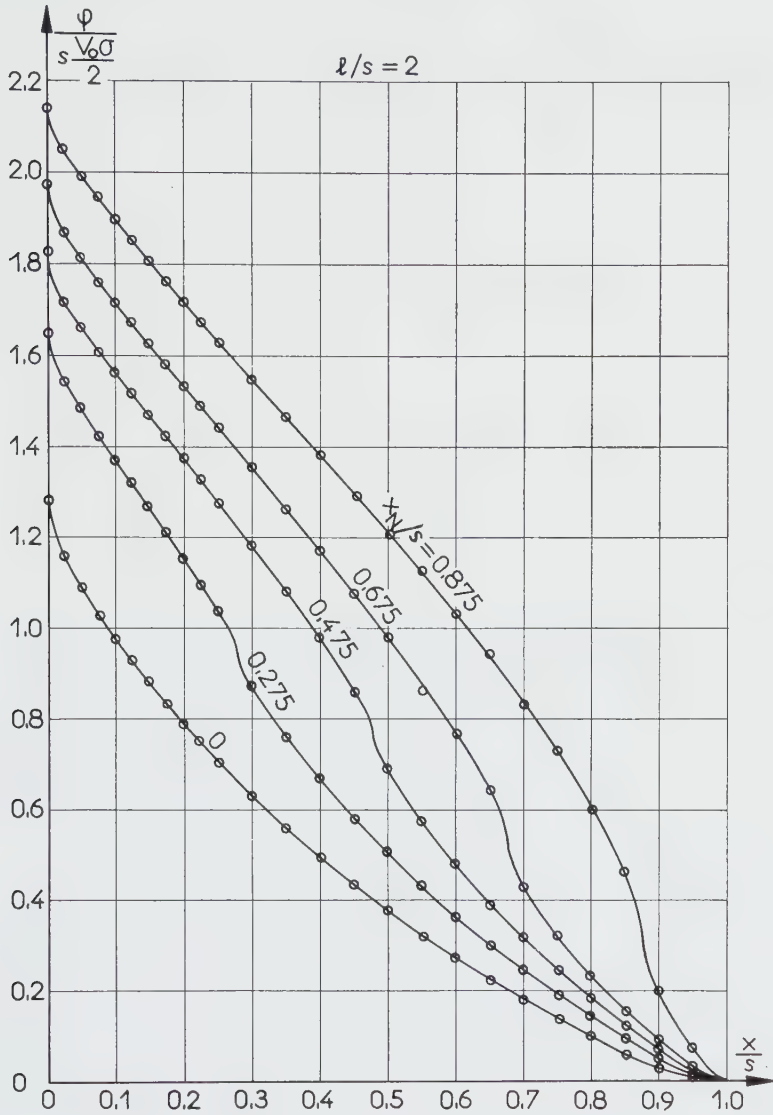


Fig. 72

REMARQUE. — Dans l'expression (74), on a remplacé $\varphi_B - \varphi$ par $-[(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma]$, l'erreur introduite est égale à $\Gamma - (\varphi_A - \varphi)$ qui est toujours inférieure à L , l'erreur relative commise sur la valeur de φ'_y sera, au plus, égale à :

$$(84) \quad \frac{\Gamma}{(\varphi_A - \varphi_B) - \Gamma} = \frac{100 - n}{n},$$

elle est d'autant plus petite que n se rapproche de cent, pour n égal à 95, par exemple, l'erreur relative est inférieure à 5,26 %. Il y a donc intérêt à prendre les résistances r les plus grandes possible afin d'augmenter le rapport $\frac{(\varphi_A - \varphi_B)}{\Gamma}$.

6,3 Expériences et résultats.

Comme exemple d'application, nous avons traité le cas d'un profil plan muni d'un volet rectiligne, la valeur de $\frac{x_N}{s}$ qui fixe la position du volet a été choisie successivement égale à 0,275, 0,475, 0,675 et 0,875. Les expériences sont effectuées dans les cuves associées par inversion, l'alimentation de la cuve Z est identique à celle utilisée pour la représentation de φ_1 (fig. 65). Suivant la position du volet, la répartition de $\frac{\varphi}{s \frac{V_0 \sigma}{2}}$ sur l'intrados du profil est représentée sur la figure 72. Les valeurs

correspondantes de a_1 , $\frac{C_z}{\sigma}$, $\beta \frac{C_z}{C_{l,r}}$ et $\frac{C_M}{\sigma}$, obtenues par le calcul analogique, sont reportées sur les figures 58, 59, 60 et 61 pour comparaison avec les courbes théoriques. L'ordre de grandeur des erreurs du calcul analogique est relativement faible et ceci montre que la méthode permet de traiter avec succès les problèmes concernant les profils courbes.

7

PROFIL COURBE AVEC UNE INCIDENCE QUELCONQUE

La superposition des potentiels de perturbation, dus à l'effet d'incidence et à l'effet de courbure obtenus par la méthode analogique, permet d'obtenir le potentiel de l'écoulement autour d'un profil courbe dont le bord d'attaque n'est plus restreint à rester dans la direction de l'écoulement à l'infini. Dans ce paragraphe, désignons par φ_0 le potentiel de perturbation de l'écoulement autour d'un profil plan avec l'incidence α (§ 5), et par φ_1 le potentiel de perturbation de l'écoulement autour d'un profil courbe dont le bord d'attaque est dirigé parallèlement à la vitesse V_0 (§ 6), la loi de cambrure de ce profil étant définie par $f'_x = \beta F'_x$; le rapport entre la longueur de la cavitation et la corde du profil est le même pour ces deux écoulements. Rappelons en résumé les conditions aux limites pour ces fonctions φ_0 et φ_1 :

— à l'infini :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)_\infty &= -\frac{V_0 \sigma_0}{2}, & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_\infty &= -\frac{V_0 \sigma_1}{2}; \\ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)_\infty &= V_0 \left(1 + \frac{\sigma_0}{2} \right) \alpha, & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_\infty &= 0; \end{aligned}$$

— sur OL et FL' :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0;$$

— sur l'intrados OF :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) f'_x.$$

Considérons le potentiel des vitesses d'un nouvel écoulement donné par l'expression suivante :

$$(85) \quad \Phi = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} \right) x - V_0 \left(1 + \frac{\sigma_1}{2} \right) \alpha y + \varphi_0 + \varphi_1.$$

A l'infini, on a encore :

$$\Phi'_x = V_0 \text{ et } \Phi'_y = 0.$$

Sur OL et FL', on a :

$$(86) \quad \Phi'_x = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} \right).$$

Or, comme la valeur de Φ'_x sur OL et FL' est reliée au nombre de cavitation σ par :

$$(87) \quad \Phi'_x = V_0 \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right),$$

il en résulte qu'ici la valeur de σ est donnée par :

$$(88) \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1.$$

Sur l'intrados OF, on a :

$$(89) \quad \Phi'_y = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) f'_x - \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \alpha \right].$$

Or, si l'on désigne par $\mathfrak{F}'_x$ la loi de cambrure du profil, dans l'écoulement Φ , la condition de glissement sur l'intrados OF s'écrit :

$$(90) \quad \Phi'_y = V_0 \left(1 + \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} \right) \mathfrak{F}'_x,$$

par comparaison avec (89), on obtient :

$$(91) \quad \mathfrak{F}'_x = \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) f'_x - \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \alpha.$$

Remarquons que le nouveau profil n'est pas déduit directement du profil original augmenté d'une incidence α : l'existence d'un facteur qui diffère de l'unité devant f'_x dans l'expression de $\mathfrak{F}'_x$ implique une affinité du profil original. En outre, rappelons que, dans le calcul analogique, f'_x est relié à σ_1 par suite des relations (71) et (77), de même α est relié à σ_0 par (62), on a :

$$(91) \quad f'_x = \frac{a_1 \sigma_1}{2 + \sigma_1} F'_x;$$

$$(92) \quad \alpha = \frac{a \sigma_0}{2 + \sigma_0}.$$

La formule (91) s'écrit encore :

$$(93) \quad \mathcal{F}'_x = \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \frac{a_1 \sigma_1}{2 + \sigma_1} F'_x - \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \frac{a \sigma_0}{2 + \sigma_0}.$$

Le coefficient de portance est donné par :

$$(94) \quad C_z = \frac{2}{V_0 s} (\Gamma_0 + \Gamma_1) = \sigma_0 \left(\frac{C_z}{\sigma}\right)_0 + \sigma_1 \left(\frac{C_z}{\sigma}\right)_1.$$

Le coefficient de trainée est déduit de :

$$(95) \quad C_x = -\frac{2}{\rho V_0^2} \int_0^1 (p - p_c) \mathcal{F}'_x d\left(\frac{x}{s}\right).$$

Or :

$$(96) \quad p - p_c = -\rho V_0 \varphi'_x = -\frac{\rho V_0^2}{2} \left\{ \sigma_0 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_0}{s \frac{V_0 \sigma_0}{2}} \right) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_1}{s \frac{V_0 \sigma_1}{2}} \right) \right\},$$

et compte tenu de (93) qui donne $\mathcal{F}'_x$, on a :

$$(97) \quad \begin{aligned} C_x = & -\left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a \sigma_0^2}{2 + \sigma_0}\right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_0}{s \frac{V_0 \sigma_0}{2}} \right) d\left(\frac{x}{s}\right) \\ & + \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a_1 \sigma_1^2}{2 + \sigma_1}\right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_1}{s \frac{V_0 \sigma_1}{2}} \right) F'_x d\left(\frac{x}{s}\right) \\ & - \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a \sigma_0 \sigma_1}{2 + \sigma_0}\right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_1}{s \frac{V_0 \sigma_1}{2}} \right) d\left(\frac{x}{s}\right) \\ & + \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a_1 \sigma_1 \sigma_0}{2 + \sigma_1}\right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_0}{s \frac{V_0 \sigma_0}{2}} \right) F'_x d\left(\frac{x}{s}\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de (81) appliqué aux mouvements φ_0 et φ_1 , il vient encore :

$$(98) \quad \begin{aligned} C_x = & \sigma_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{C_x}{\sigma}\right)_0 + \sigma_1 \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{C_x}{\sigma}\right)_1 \\ & + \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a \sigma_0 \sigma_1}{2 + \sigma_0}\right) \left(\frac{C_z}{\sigma}\right)_1 \\ & + \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1}\right) \left(\frac{a_1 \sigma_1 \sigma_0}{2 + \sigma_1}\right) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\varphi_0}{s \frac{V_0 \sigma_0}{2}} \right) F'_x d\left(\frac{x}{s}\right). \end{aligned}$$

Les résultats du calcul analogique permettent d'après cette formule de calculer la valeur de C_x .

Si φ_1 correspond à l'écoulement autour d'un profil plan muni d'un volet recti-

ligne et pour lequel la partie ON est parallèle à la vitesse V_0 , rappelons que $F'_x = 0$ sur ON, et $F'_x = -1$ sur NF, la formule (98) s'écrit dans ces conditions :

$$(99) \quad C_x = \sigma_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \left(\frac{C_x}{\sigma} \right)_0 + \sigma_1 \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \left(\frac{C_x}{\sigma} \right)_1 \\ + \left(1 - \frac{\sigma_1}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \left(\frac{a \sigma_0 \sigma_1}{2 + \sigma_0} \right) \left(\frac{C_z}{\sigma} \right)_1 \\ + \left(1 - \frac{\sigma_0}{2 + \sigma_0 + \sigma_1} \right) \left(\frac{a_1 \sigma_1 \sigma_0}{2 + \sigma_1} \right) \left(\frac{\frac{\varphi_0}{V_0 \sigma_0}}{s \frac{2}{2}} \right)_{x=x_N}.$$

Pour le coefficient du moment par rapport au bord d'attaque, on a :

$$(100) \quad C_M = \frac{2}{\rho V_0^3} \int_0^1 (p - p_0) \left(\frac{x}{s} \right) d \left(\frac{x}{s} \right) \\ = - \int_0^1 \left[\sigma_0 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\frac{\varphi_0}{V_0 \sigma_0}}{s \frac{2}{2}} \right) + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \frac{x}{s}} \left(\frac{\frac{\varphi_1}{V_0 \sigma_1}}{s \frac{2}{2}} \right) \right] \left(\frac{x}{s} \right) d \left(\frac{x}{s} \right) \\ = (C_M)_0 + (C_M)_1.$$

compte tenu de (65).

REMARQUE. — Si l'on admet que la condition de glissement due à l'intrados du profil s'écrit sous la forme habituelle : $v = V_0 f'(x)$, au lieu de la forme choisie par TULIN [l'équation (31)], on est conduit à remplacer le produit $\frac{(2 + \sigma) \beta}{\sigma}$, qui figure dans les résultats des calculs analytiques ou analogiques par $\frac{2 \beta}{\sigma}$, c'est-à-dire que dans la formule (21) et dans la figure 58 on doit avoir $a_1 = \frac{2 \beta}{\sigma}$; les résultats concernant $\frac{C_z}{\sigma}$, $\frac{C_z \beta}{C_x}$ et $\frac{C_M}{\sigma}$ restent inchangés. Si l'on superpose le mouvement de l'effet d'incidence au mouvement de l'effet de cambrure, on aura un écoulement autour du profil original augmenté d'incidence, la formule (91) devient :

$$\mathcal{F}'_x = f'_x - \alpha.$$

CONCLUSION

En exploitant le schéma de la théorie linéaire du jet de soufflage infiniment délié proposé par d'autres auteurs, nous avons développé dans le présent mémoire différentes études concernant des écoulements très divers influencés par l'action d'un mince jet de soufflage. La méthode de calcul par analogie rhéoelectrique s'est révélée particulièrement efficace dans la résolution de ces problèmes; elle a permis d'atteindre rapidement les résultats pratiques les plus intéressants pour les applications.

Nous avons pu compléter certaines de ces études en donnant des solutions analytiques relatives aux valeurs faibles du paramètre fondamental de soufflage C_μ . La confrontation des résultats obtenus par deux méthodes différentes a permis ainsi d'intéressantes vérifications.

Suivant les problèmes traités nous avons été conduit à définir l'écoulement, soit par son potentiel des vitesses, soit par son potentiel d'accélération; le choix a été dicté le plus souvent par la commodité de la mise en œuvre du calcul analogique. La décomposition des problèmes en problèmes élémentaires fondamentaux s'est révélée féconde : elle a permis de distinguer avec plus de netteté l'influence des divers paramètres et l'importance de chacun.

Certaines des méthodes qui ont été proposées et développées dans cette étude peuvent être exploitées ou généralisées en vue de nouvelles recherches; à cet égard, la manière de traiter les écoulements à travers une grille de profils minces, avec le mode de linéarisation qui a été suggéré, paraît particulièrement avantageuse pour l'analyse de problèmes à la cuve électrique et mériterait, sans doute, d'être utilisée dans d'autres questions analogues.

Signalons, enfin, que le modèle mathématique de TULIN et BURKART pour définir des écoulements autour d'hydrofoils supercavitants s'est montré remarquablement bien adapté à une interprétation analogique au bassin électrique. En développant cette interprétation il semble, dès à présent, possible de traiter des problèmes beaucoup plus complexes que ceux dont la solution analytique est actuellement connue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. DUQUENNE. — *Sur le calcul analogique des surfaces portantes*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 238, pp. 1564-1566 (1954).
- [2] H. GLAUERT. — *The elements of aerofoil and airscrew theory*. MacMillan, New York (1943).
- [3] G. HACQUES. — *Problèmes de la surface portante annulaire traités par la méthode des analogies rhéoelectriques*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (juin 1958).
- [4] H. B. HELMBOLD. — *The lift of a blowing wing in a parallel stream*. Journal Aéronautical Sciences, vol. 22, n° 5, p. 341 (1955).
- [5] M. KADOSCH. — *Mécanique de la déviation des jets propulsifs*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris.
- [6] R. LEGENDRE. — *Influence de l'émission d'un jet au bord de fuite d'un profil sur l'écoulement autour de ce profil*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 242 (14 mai 1956).
- [7] R. LEGENDRE. — *Principe d'étude de l'aile à jet*. La Recherche Aéronautique, n° 53, p. 20 (1956).
- [8] T. S. LUU. — *Déviation d'un jet principal par un jet auxiliaire faiblement incliné. Résolution du problème par analogie rhéoelectrique*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 246, pp. 55-58 (1958).
- [9] T. S. LUU. — *Méthodes d'analogie électrique dans l'étude des problèmes concernant les phénomènes de soufflage*. Actes des Deuxièmes Journées Internationales du Calcul Analogique, Strasbourg (septembre 1958).
- [10] T. S. LUU. — *Hélice carénée, théorie et calcul analogique de l'effet d'un jet mince annulaire au bord de fuite*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 249, pp. 2003-2005 (1959).
- [11] T. S. LUU. — *Soufflage au bord de fuite des profils d'un distributeur*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 250, pp. 2321-2323 (1960).
- [12] L. MALAVARD. — *La technique des analogies électriques*. Un chapitre du volume « Techniques générales de Laboratoire de Physique », édition Centre National de la Recherche scientifique, vol. II, chap. XV (juin 1950).
- [13] L. MALAVARD. — *La méthode d'analogie rhéoelectrique. Ses possibilités et ses tendances*. Actes des Premières Journées Internationales du Calcul Analogique, Bruxelles (septembre 1955).
- [14] L. MALAVARD. — *Contribution à l'étude théorique du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 242 (mai 1956).
- [15] L. MALAVARD, T. S. LUU et A. REBOURS. — *Etude préliminaire du soufflage à l'intrados d'une aile*. Laboratoire de Calcul Analogique, Centre National de la Recherche scientifique, Mem. 5802 (janvier 1958).
- [16] L. MALAVARD et L. LEPAGE. — *Principes et résultats de calculs d'ailes à jet par analogies rhéoelectriques*. La Recherche Aéronautique, n° 77 (juillet-août 1960).
- [17] L. M. MILNE-THOMSON. — *Theoretical hydrodynamics*. Troisième édition, p. 272, MacMillan, New York (1955).
- [18] J. PAULON. — *Application du soufflage au bord de fuite au contrôle de la déflexion des grilles d'aubes*. La Recherche Aéronautique, n° 73, pp. 17-20 (1959).
- [19] A. REBOURS. — *Soufflage sur une paroi plane et à l'intrados d'un profil d'aile*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (juin 1958).

- [20] G. RENARD. — *Représentation directe par analogie rhéoelectrique des gradients de fonctions harmoniques en domaine limité ou illimité*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris (juin 1957).
- [21] J. REVUZ. — *Etude analogique du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile*. Actes des Premières Journées Internationales du Calcul Analogique, Bruxelles (septembre 1955).
- [22] M. ROY. — *Principes d'étude de l'aile à jet*. La Recherche Aéronautique, n° 52 (1956).
- [23] R. SIESTRUNCK et J. J. BERNARD. — *Sur une méthode de détermination numérique des potentiels de perturbation dans la théorie linéarisée du soufflage au bord de fuite des profils d'ailes*. Compte rendu de l'Académie des Sciences, t. 242 (14 mai 1956).
- [24] D. A. SPENCE. — *The lift of a blowing wing in a parallel stream*. Journal Aeronautical Sciences, vol. 23, n° 1, pp. 92-94 (1956).
- [25] M. P. TULIN. — *Steady two dimensional cavity flow about slender bodies*. David Taylor Model Basin Report, 834 (mai 1953).
- [26] M. P. TULIN et M. P. BURKART. — *Linearized theory for flow about lifting foils at zero cavitation number*. David Taylor Model Basin Report, C-638 (février 1955).
- [27] M. P. TULIN. — *Supercavitating flow past foils and struts*. Symposium on Cavitation in Hydrodynamics. National Physical Laboratory, Teddington, England (septembre 1955).
- [28] L. C. WOODS. — *On the theory of source flow from aerofoils*. Quarteeley Journal Mechanics and Applied Mathematics, Part 4, pp. 441-456 (1956).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

COMPRESSEURS AXIAUX ET CENTRIFUGES SUPERSONIQUES

Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1960

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE